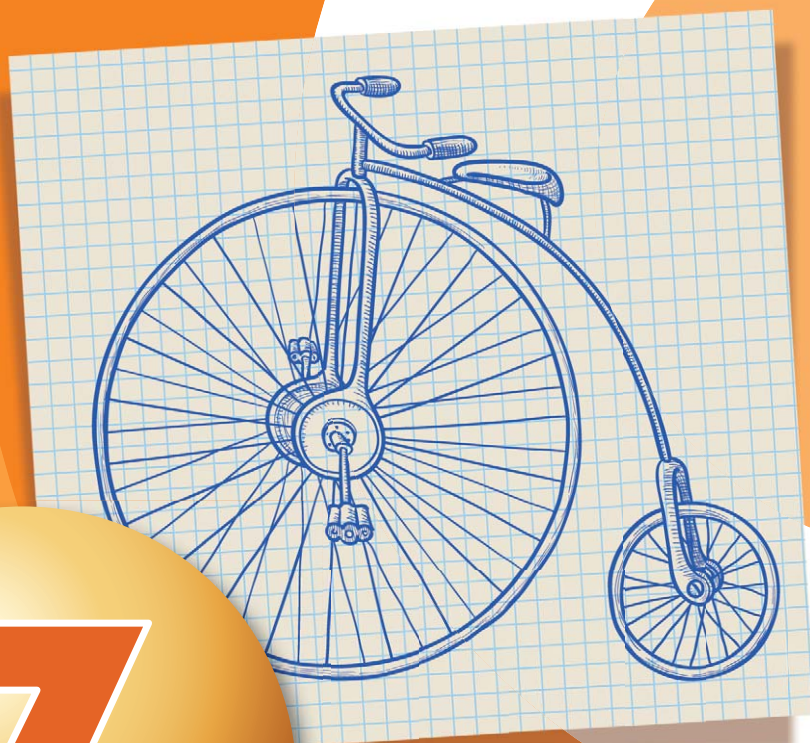




АЛГЕБРА

АЛГЕБРА

7





АЛГЕБРА

7 класс

Учебник

Допущено
Министерством просвещения
Российской Федерации

3-е издание, стереотипное

Москва
«Просвещение»
2022



УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721
А45

Серия «Сферы» основана в 2003 году

Линия учебно-методических комплексов «СФЕРЫ» по алгебре

Авторы: канд. пед. наук **Е. А. Бунимович**, канд. пед. наук **Л. В. Кузнецова**,
канд. пед. наук **С. С. Минаева**, канд. пед. наук **Л. О. Рослова**,
канд. пед. наук **С. Б. Суворова**

Получены положительные заключения по результатам **научной** (заключение РАО № 1135 от 19.11.16 г.), **педагогической** (заключение РАО № 1026 от 21.11.16 г.) и **общественной** (заключение РКС № 346-ОЭ от 19.12.16 г.) экспертиз

Издание выходит в pdf-формате.

Алгебра : 7-й класс : учебник : издание в pdf-формате / Е. А. Бунимович, Л. В. Кузнецова, С. С. Минаева [и др.]. — 3-е изд., стер. — Москва : Просвещение, 2022. — 207, [1] с. : ил. — (Сферы).
ISBN 978-5-09-101236-1 (электр. изд.). — Текст : электронный.
ISBN 978-5-09-095125-8 (печ. изд.).

Данный учебник по алгебре продолжает линию учебно-методических комплексов «Сферы» по математике, начатую учебниками для 5–6 классов. Издание подготовлено в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. В содержательном плане материал учебника направлен на формирование центральных алгебраических понятий и развитие умения применять их при решении как математических задач, так и задач прикладного характера. Главными особенностями учебника являются фиксированный в тематических разворотах формат, лаконичность и жёсткая структурированность текста, структурированность системы упражнений, разнообразный иллюстративный ряд.

УДК 373.167.1:512+512(075.3)
ББК 22.14я721

ISBN 978-5-09-101236-1 (электр. изд.)
ISBN 978-5-09-095125-8 (печ. изд.)

© АО «Издательство «Просвещение», 2019
© Художественное оформление.
АО «Издательство «Просвещение», 2019
Все права защищены

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
---------------	---

ГЛАВА 1. ДРОБИ И ПРОЦЕНТЫ

1.1	Дроби обыкновенные и десятичные	8
1.2	Степень с натуральным показателем.....	14
1.3	Основные задачи на проценты	18
1.4	Проценты вокруг нас	22
1.5	Статистические характеристики	26
1.6	Случайные события	30
1.7	Частота случайного события	34
	<i>Узнайте больше. Последняя цифра степени</i>	38
	Подведём итоги	39

ГЛАВА 2. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

2.1	Реальные зависимости и формулы	42
2.2	Прямая пропорциональность	46
2.3	Обратная пропорциональность	50
2.4	Пропорции. Решение задач с помощью пропорций	54
2.5	Пропорциональное деление	58
	<i>Узнайте больше. Задачи на «сложные» пропорции</i>	62
	Подведём итоги	63

ГЛАВА 3. ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ

3.1	Буквенные выражения и числовые подстановки	66
3.2	Буквенная запись свойств действий над числами	70
3.3	Преобразование буквенных выражений	74
3.4	Раскрытие скобок	80
3.5	Приведение подобных слагаемых	84
	<i>Узнайте больше. Ещё раз о законах алгебры</i>	88
	Подведём итоги	90

ГЛАВА 4. УРАВНЕНИЯ

4.1	Уравнение и его корни	92
4.2	Решение уравнений	96
4.3	Решение задач с помощью уравнений	100
	<i>Узнайте больше. Некоторые неалгоритмические приёмы</i> решения уравнений	104
	Подведём итоги	106

ГЛАВА 5. КООРДИНАТЫ И ГРАФИКИ

5.1	Точки на координатной прямой	108
5.2	Множества точек на координатной плоскости	112
5.3	Графики	116
5.4	Ещё несколько важных графиков	120

5.5	Графики вокруг нас	124
	<i>Узнайте больше.</i> Графики зависимостей, заданных равенствами с модулем	128
	Подведём итоги	129

ГЛАВА 6. МНОГОЧЛЕНЫ

6.1	Преобразование выражений, содержащих степени с натуральными показателями	132
6.2	Одночлены и многочлены	138
6.3	Сложение и вычитание многочленов	142
6.4	Умножение многочленов	146
6.5	Формулы квадрата суммы и квадрата разности	152
6.6	Решение задач с помощью уравнений	158
	<i>Узнайте больше.</i> Деление с остатком	162
	Подведём итоги	163

ГЛАВА 7. РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

7.1	Вынесение общего множителя за скобки	166
7.2	Способ группировки	170
7.3	Формула разности квадратов	172
7.4	Формулы разности и суммы кубов	176
7.5	Применение нескольких способов разложения на множители	178
7.6	Решение уравнений с помощью разложения на множители	180
	<i>Узнайте больше.</i> Несколько более сложных примеров	182
	Подведём итоги	184

ГЛАВА 8. КОМБИНАТОРИКА

8.1	Решение комбинаторных задач	186
8.2	Комбинаторное правило умножения	188
8.3	Правило сложения	192
8.4	Перестановки	194
	<i>Узнайте больше.</i> Круговые перестановки	198
	Подведём итоги	199
	Ответы	201

ВВЕДЕНИЕ

Алгебра, систематическое изучение которой мы начинаем в этом году, — одна из старейших ветвей математики, наряду с уже известными вам арифметикой и геометрией. Во многом классические идеи алгебры — это расширение и обобщение арифметических идей.

В алгебре принято записывать математические выражения и формулы в самом общем виде, заменяя конкретные числа на буквенные символы. Кроме букв и чисел, в алгебраических формулах используются уже хорошо известные вам арифметические операции: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень...

Зачем математике, кроме чисел и фигур, понадобились буквы, формулы, что такое алгебраическое выражение, как с помощью алгебраических приёмов можно решать самые разные задачи, вы и узнаете, изучая алгебру.

Так, глава «Уравнения» как раз и расскажет вам, как алгебраическим способом решаются задачи. Вы сможете убедиться, что решение задач с помощью уравнений позволяет находить общие подходы к решению совсем вроде бы непохожих задач, что такие разные на первый взгляд задачи легко и красиво решаются с помощью одного и того же алгебраического приёма.

Глава «Координаты и графики» расскажет о том, как связаны алгебра и геометрия, точки и числа, линии и формулы, как много неожиданного и полезного даёт взаимодействие алгебраических и геометрических методов.

Кроме этого, продолжая в 7 классе изучение общего курса математики, мы с вами попробуем придать более точный математический смысл таким уже наверняка знакомым вам словам, которые вы уже не раз слышали и в обыденной речи, и на уроках математики, как пропорция, проценты, координаты, график, вероятность, статистика, на уроках математики в этом учебном году вы узнаете новые полезные свойства понятий, обозначаемых этими терминами...

Вплоть до недавнего времени практическое применение алгебры в основном ограничивалось решением алгебраических уравнений, классическими алгебраическими подходами к решению задач. Однако бурное развитие ряда новых отраслей, проектирование и использование новых видов техники, появление электронно-вычислительных машин, систем компьютерного поиска, хранения, переработки и передачи информации оказались невозможными без применения многих разделов современной алгебры.

Теория алгоритмов, другие разделы алгебры лежат в основе проектирования компьютеров, электронных схем, современных языков программирования, решения задач распознавания образов, кодирования и декодирования информации и многих других практических задач. Современное математическое моделирование широко использует практически все разделы алгебры.

Каждая глава учебника открывается разделом «Интересно», в котором можно узнать любопытные и зачастую неожиданные факты из истории тех разделов математики, которым посвящена глава. Много полезной и необходимой информации в учебнике вынесено на поля — не забывайте внимательно изучить все рубрики, всё, что пришпилено «кнопками» и «скрепками», отмечено восклицательными знаками и др.

Желаем вам успеха!

РУБРИКИ НА СТРАНИЦАХ УЧЕБНИКА

На страницах учебника вы увидите специальные знаки, которые помогут вам в работе с текстом.

«ВНИМАНИЕ!» Так выделяется утверждение, которое нужно запомнить.

«В ФОКУСЕ». Важная деталь, на которую полезно обратить внимание.

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БЛОКНОТ». Небольшой фрагмент на полях, который содержит дополнительную информацию.

«ЗАПИСЫВАЕМ РЕШЕНИЕ». Примеры решений некоторых задач.

«СПРАВКА». Здесь содержится полезный справочный материал.

1

Так обозначены упражнения полегче.

10

Так обозначены упражнения потруднее.

ГЛАВА 1

ДРОБИ И ПРОЦЕНТЫ

- ДРОБИ ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ
- СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ
- ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ
- ПРОЦЕНТЫ ВОКРУГ НАС
- СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ
- СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ
- ЧАСТОТА СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Узнайте больше

- ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА СТЕПЕНИ



ИНТЕРЕСНО

В своём письме Леонарду Эйлеру от 7 июня 1742 года немецкий математик Кристиан Гольдбах изложил гипотезу, которая теперь носит его имя и звучит так: «Всякое целое чётное положительное число, большее или равное 4, может быть выражено как сумма двух простых чисел». Несмотря на столь простую формулировку, гипотеза эта до сих пор не доказана, хотя большинство математиков считают, что она должна быть верной. В своё время Эйлер с помощью вычислений убедился, что она верна до числа 2500, а в настоящее время с помощью компьютеров она проверена для всех чётных чисел до двух триллионов.

равных 10, т.е. масса Земли 5 978 000 000 000 000 000 000

1.1

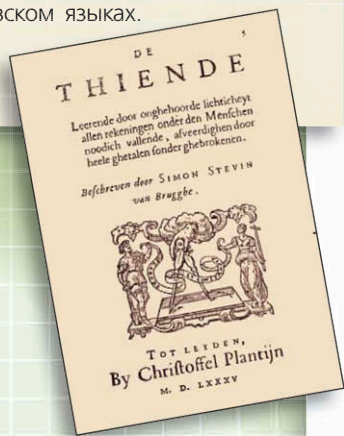
ВЫ ВСПОМНИТЕ:

- Какую обыкновенную дробь можно представить в виде десятичной.
- Как сравнивают дроби, представленные в разных формах.
- Как выполняют совместные действия с обыкновенными и десятичными дробями.

Десятичные дроби занимают выдающееся место в истории математики. С их введением десятичная система счисления получила завершение.

Появились десятичные дроби ещё в III в. до н.э. в Древнем Китае, где применялась десятичная система мер. Теорию десятичных дробей впервые разработал в XV в. самаркандский астроном Джамшид аль-Каши. Но его труды не были известны европейским учёным, и они открывали десятичные дроби заново. Французский учёный конца XVI в. Франсуа Виет первым в Европе стал применять десятичные дроби в научных расчётах.

А в популяризации десятичных дробей огромная заслуга принадлежит фламандскому инженеру и учёному Симону Стевину. В 1585 г. он изложил всю теорию десятичных дробей на семи страницах в книге «Десятая». Стремясь к распространению десятичной системы, Стевин опубликовал свой труд не на языке науки — латыни, а на разговорных — фламандском и французском языках.



ДРОБИ ОБЫКНОВЕННЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫЕ

Изучая математику в 5 и 6 классах, вы узнали, что есть два способа записи дробных чисел — в виде обыкновенных и в виде десятичных дробей, и научились оперировать дробями, заданными в любой из этих форм. Но бывает и так, что среди чисел, с которыми приходится иметь дело, есть и обыкновенные, и десятичные дроби. Тогда их требуется привести к какой-нибудь одной из этих форм. При этом важно уметь правильно выбрать, с какими именно дробями в данном конкретном случае следует иметь дело.

ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ ДРОБЕЙ К ДРУГОЙ

Десятичными называют дроби со знаменателями, равными 10, 100, 1000, ..., для которых принят специальный способ записи, распространяющий на дробные числа идею десятичной системы счисления. Их записывают не «в два этажа», а в строчку, без знаменателя, отделяя запятой справа налево столько цифр, сколько нулей содержится в знаменателе. Так, вместо $3\frac{14}{100}$ пишут 3,14, а вместо $\frac{27}{1000}$ пишут 0,027.

Понятно, что любую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби. Для этого нужно просто от десятичной записи перейти к «двухэтажной», указав знаменатель дроби в явном виде.

Например,

$$1,4 = 1\frac{4}{10} = \frac{14}{10}, \quad 0,0012 = \frac{12}{10000}.$$

В то же время не всякую обыкновенную дробь можно записать в виде десятичной дроби. В самом деле, не всякую обыкновенную дробь можно привести к одному из знаменателей 10, 100, 1000 и т. д.

Например, дробь $\frac{7}{20}$ обращается в десятичную ($\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 0,35$), а дробь $\frac{4}{15}$ — нет.



В виде десятичной дроби может быть представлена всякая обыкновенная дробь, знаменатель которой не имеет никаких простых делителей, кроме 2 и 5. Если же знаменатель дроби имеет хотя бы один простой делитель, отличный от 2 и 5, и эта дробь несократима, то её нельзя представить в виде десятичной.

Если обыкновенная дробь представлена в виде десятичной, то перейти к этой форме её записи можно разными способами: привести её к знаменателю, равному

степени 10, или разделить уголком числитель дроби на её знаменатель. В практических расчётах для обращения обыкновенной дроби в десятичную обычно используют калькулятор.

СРАВНЕНИЕ ДРОБЕЙ

Пример 1. Сравним дроби $\frac{5}{8}$ и 0,65.

Перейдём к одной и той же форме записи дробей. В данном случае это можно сделать по-разному: представить 0,65 в виде обыкновенной дроби или записать $\frac{5}{8}$ в виде десятичной дроби. Воспользуемся вторым способом, так как десятичные дроби сравнивать легче. Получим

$$\frac{5}{8} = 0,625, \text{ а } 0,625 < 0,65; \text{ значит, } \frac{5}{8} < 0,65.$$

Пример 2. Сравним дроби $\frac{7}{29}$ и 0,243.

Дробь $\frac{7}{29}$ в десятичную не обращается, а сравнение в обыкновенных дробях трудоёмко. Но попробуем всё же воспользоваться десятичными дробями. Дело в том, что для сравнения нам достаточно иметь десятичную дробь, выражающую число $\frac{7}{29}$ приближённо. А найти такую дробь легко с помощью калькулятора.

При делении 7 на 29 на дисплее калькулятора появится число 0,2413793. (Вы, конечно, понимаете, что деление бесконечно и калькулятор просто обрывает его.) Чтобы сравнить данные числа, нам достаточно взять приближённое десятичное значение $\frac{7}{29}$ с тремя знаками после запятой. Имеем

$$\frac{7}{29} \approx 0,241, \text{ а } 0,241 < 0,243; \text{ значит, } \frac{7}{29} < 0,243.$$

СОВМЕСТНЫЕ ДЕЙСТВИЯ С ОБЫКНОВЕННЫМИ И ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Пример 3. Найдём сумму $0,3 + \frac{1}{6}$.

В данном случае выбирать, в каких дробях удобнее выполнить действие, не приходится. В самом деле, дробь $\frac{1}{6}$ нельзя обратить в десятичную, поэтому следует записать в виде обыкновенной дроби число 0,3:

$$0,3 + \frac{1}{6} = \frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9+5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}.$$

Пример 4. Найдём значение выражения $0,25 : 1,5$.

Если требуется выполнить деление на десятичную дробь, то лучше перейти к обыкновенным дробям, так как деление уголком может оказаться бесконечным. Получим

$$0,25 : 1,5 = \frac{25}{100} : \frac{15}{10} = \frac{25 \cdot 10}{100 \cdot 15} = \frac{1}{6}.$$

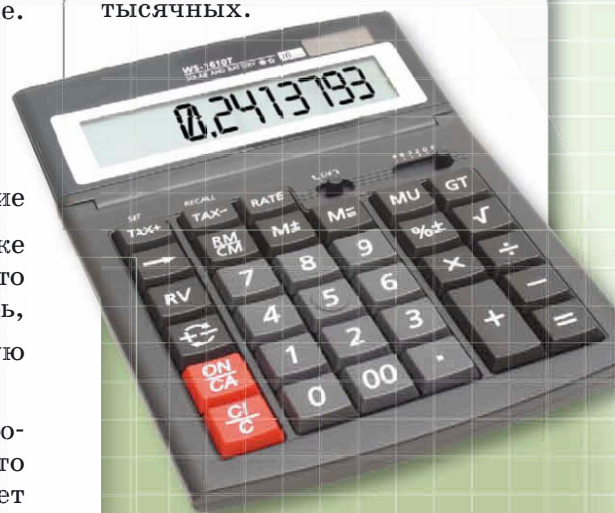


Десятичные приближения дроби $\frac{7}{29}$:

$\frac{7}{29} \approx 0,2$ — с точностью до десятых;

$\frac{7}{29} \approx 0,24$ — с точностью до сотых;

$\frac{7}{29} \approx 0,241$ — с точностью до тысячных.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие вы знаете способы обращения обыкновенной дроби в десятичную? Проиллюстрируйте их на примере дроби $\frac{13}{40}$.
- Как сравнить дроби 0,3 и $\frac{7}{20}$? Какая из этих дробей больше?
- Вычислите значение разности $0,7 - \frac{5}{12}$ и произведения $\frac{3}{20} \cdot 0,8$. В каком случае это можно сделать и в десятичных, и в обыкновенных дробях?

УПРАЖНЕНИЯ

ПЕРЕХОДИМ ОТ ОДНОЙ ФОРМЫ ЗАПИСИ ДРОБЕЙ К ДРУГОЙ

- 1** Запишите десятичные дроби в виде обыкновенных дробей и сократите их:
 а) 0,75; 0,36; 0,05; 0,06; в) 0,008; 0,045; 0,064; 0,0125;
 б) 1,2; 3,5; 10,5; 3,6; г) 1,16; 2,04; 4,008; 5,025.
- 2** Представьте в виде десятичных дробей числа:
 а) $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{20}$; $\frac{4}{25}$; в) $5\frac{1}{2}$; $1\frac{3}{20}$; $5\frac{2}{25}$; $2\frac{3}{8}$;
 б) $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{200}$; $\frac{13}{250}$; $\frac{11}{500}$; г) $\frac{19}{5}$; $\frac{101}{20}$; $\frac{32}{25}$; $\frac{11}{8}$.
- 3** Какие из данных обыкновенных дробей можно представить в виде десятичных, а какие нельзя:
 $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{9}{12}$; $\frac{10}{15}$; $\frac{5}{35}$; $\frac{9}{45}$; $\frac{6}{40}$; $\frac{14}{42}$?
- 4** Запишите частное в виде обыкновенной дроби и, если возможно, представьте его в виде десятичной дроби:
 а) $25 : 55$; б) $21 : 15$; в) $32 : 12$; г) $36 : 45$; д) $44 : 110$.
- 5** Выразите в часах (если возможно, то десятичной дробью):
 а) 5 мин, 6 мин, 10 мин, 12 мин, 15 мин, 20 мин, 30 мин;
 б) 2 мин, 4 мин, 18 мин, 25 мин, 40 мин, 45 мин, 50 мин;
 в) 75 мин, 80 мин, 90 мин, 100 мин, 150 мин, 200 мин.
- 6** Определите, сколько знаков после запятой должно быть у десятичной дроби, в которую обращается данная обыкновенная дробь, и проверьте себя, разделив числитель дроби на знаменатель (воспользуйтесь калькулятором):
 а) $\frac{29}{40}$; б) $\frac{41}{80}$; в) $\frac{11}{16}$; г) $\frac{17}{32}$; д) $\frac{57}{160}$.

СРАВНИВАЕМ ДРОБИ

- 7** Сравните десятичные дроби:
 а) 0,3708 и 0,3714; в) 0,5175 и 0,517399; д) 0,00813 и 0,01;
 б) 0,0603 и 0,0599; г) 0,454 и 0,45454; е) 0,00999 и 0,01001.
- 8** Сравните обыкновенные дроби:
 а) $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{9}$; в) $\frac{4}{9}$ и $\frac{4}{11}$; д) $\frac{20}{19}$ и $\frac{19}{20}$; ж) $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{8}$;
 б) $\frac{6}{7}$ и $\frac{7}{8}$; г) $\frac{7}{15}$ и $\frac{7}{16}$; е) $\frac{3}{19}$ и $\frac{5}{21}$; з) $\frac{13}{30}$ и $\frac{21}{40}$.
- В каких случаях вы смогли это сделать, не приводя дроби к общему знаменателю?
- 9** Сравните обыкновенную дробь и десятичную:
 а) 0,8 и $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{3}$ и 0,5; д) 0,6 и $\frac{3}{7}$; ж) $\frac{5}{6}$ и 0,84;
 б) $\frac{4}{5}$ и 0,9; г) $\frac{4}{9}$ и 0,4; е) 0,2 и $\frac{4}{15}$; з) $\frac{4}{7}$ и 0,57.

10

- а) Петя, сделав 17 шагов, прошёл 8 м, а Коля, сделав 20 шагов, прошёл 11 м. У кого из них шаг короче?
 б) Петя распечатал на своём принтере 14 страниц за 3 мин, а Коля на своём — 24 страницы за 5 мин. Чей принтер работает быстрее?

11

Расположите в порядке возрастания числа:

- а) $\frac{5}{9}$; 0,5; 0,55; б) $\frac{2}{7}$; 0,28; 0,2; в) $\frac{3}{4}$; $\frac{2}{3}$; 0,6; г) $\frac{7}{9}$; $\frac{4}{5}$; 0,7.

12

1) Объясните, как сравнивают положительное и отрицательное число, два отрицательных числа на примерах пар чисел: 0,01 и -1,9; -5,5 и -0,5.

2) Сравните:

- а) $\frac{4}{5}$ и 0,7; $-\frac{4}{5}$ и -0,7; $-\frac{4}{5}$ и 0,7; б) $\frac{2}{3}$ и 0,8; $\frac{2}{3}$ и -0,8; $-\frac{2}{3}$ и -0,8.

13

Сравните числа:

- а) -0,7 и $-\frac{7}{11}$; б) $-\frac{5}{6}$ и -0,8; в) $-\frac{1}{4}$ и -0,2; г) -0,1 и $-\frac{4}{25}$.

14

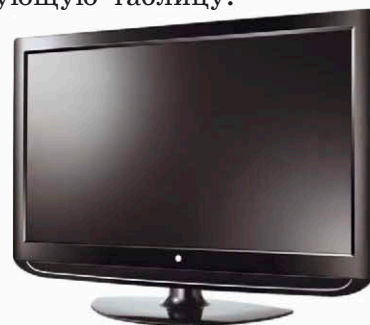
Сравните числа, воспользовавшись калькулятором:

- а) 0,53 и $\frac{17}{32}$; б) $\frac{5}{13}$ и 0,3809; в) $\frac{39}{125}$ и $\frac{5}{16}$; г) $\frac{11}{170}$ и $\frac{15}{231}$.

15

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС По итогам работы за неделю отдел контроля качества завода, выпускающего телевизоры, подготовил следующую таблицу:

День недели	Выпущено телевизоров (шт.)	Признано годными (шт.)
Понедельник	235	228
Вторник	245	239
Среда	255	252
Четверг	256	250
Пятница	240	233



В какой день недели завод работал лучше всего, в какой хуже всего с позиции оценки качества выпущенной продукции? (Используйте калькулятор.)

16

Расположите в порядке убывания числа:

- а) 0,16; 0,165; $\frac{7}{40}$; б) $\frac{8}{17}$; $\frac{9}{20}$; $\frac{12}{35}$; в) $\frac{7}{12}$; $\frac{8}{15}$; 0,54.

17

Расположите в порядке возрастания следующие дроби (воспользуйтесь калькулятором):

- а) $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{9}{14}$; $\frac{14}{25}$; б) $-\frac{11}{20}$; $-\frac{4}{9}$; $-\frac{5}{9}$; $-\frac{8}{15}$; $-\frac{3}{4}$.

18

а) Запишите всевозможные правильные дроби, числителями и знаменателями которых являются однозначные простые числа. Какая из этих дробей наибольшая и какая наименьшая? Расположите эти дроби в порядке возрастания.

б) Запишите всевозможные неправильные дроби, отличные от 1, числителями и знаменателями которых являются однозначные простые числа. Какая из этих дробей наибольшая и какая наименьшая? Расположите эти дроби в порядке убывания.

ВЫПОЛНЯЕМ ВЫЧИСЛЕНИЯ

19

Выполните действие:

- а) $0,5 + \frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3} - 0,3$; д) $0,12 \cdot \frac{1}{15}$; ж) $1\frac{1}{6} : 1,4$;
 б) $0,72 + \frac{2}{5}$; г) $\frac{4}{5} - 0,76$; е) $\frac{5}{36} \cdot 0,8$; з) $4,8 : \frac{6}{7}$.

20

Найдите частное (запишите ответ в виде десятичной дроби, если это возможно):

- а) $2,7 : 6$; в) $3,2 : 0,6$; д) $0,24 : 1,5$;
 б) $0,25 : 15$; г) $0,7 : 0,3$; е) $3 : 1,2$.

21

1) Вспомните правила выполнения действий с отрицательными числами и проиллюстрируйте их на примере следующих выражений:

- а) $-15 + (-20)$; $-15 - (-20)$; $-40 - 25$; $-18 + 12$;
 б) $-15 \cdot (-3)$; $-8 \cdot 4$; $54 : (-6)$.

2) Вычислите:

- а) $-3,9 + (-\frac{1}{4})$; в) $-\frac{3}{7} + 0,5$; д) $-1,44 \cdot \frac{5}{12}$; ж) $-2,2 : (-1\frac{1}{3})$;
 б) $-\frac{1}{6} - 0,5$; г) $\frac{3}{20} - 0,95$; е) $0,28 : (-\frac{14}{17})$; з) $1\frac{1}{15} \cdot (-0,5)$.

22

Вычислите:

- а) $-7 \cdot 1,25 + 10$; б) $-5 \cdot (-3,6) - 3,8$; в) $1,8 - 4 \cdot (-2,15)$;
 $-7 \cdot (1,25 + 10)$; $-5 \cdot (-3,6 - 3,8)$; $(1,8 - 4) \cdot (-2,15)$.

23

1) Для вычисления значения дроби $\frac{1,2 \cdot 0,5}{1,8}$ её можно преобразовать так, чтобы в числителе и знаменателе оказались целые числа:

$$\frac{1,2 \cdot 0,5}{1,8} = \frac{1,2 \cdot 10 \cdot 0,5 \cdot 10}{1,8 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{12 \cdot 5}{18 \cdot 10} = \frac{1}{3}.$$

2) Воспользовавшись приведённым образцом, вычислите:

- а) $\frac{0,6}{0,4 \cdot 0,9}$; б) $\frac{0,02 \cdot 21}{2,8 \cdot 0,3}$; в) $\frac{1,8 \cdot 0,08}{1,5 \cdot 0,4}$; г) $\frac{0,8 \cdot 0,75}{12,5 \cdot 0,36}$.

24

Запишите выражение, используя в качестве знака деления дробную черту, и найдите его значение:

- а) $0,3 \cdot 1,6 : 0,84$; в) $0,05 : 8,1 \cdot 4,5$; д) $0,48 : (0,44 \cdot 6)$;
 б) $6,3 : (13,5 \cdot 2,8)$; г) $0,15 \cdot 2,4 : 1,08$; е) $(8 \cdot 0,39) : (5,2 \cdot 9)$.

25

1) Чтобы найти значение дроби $\frac{0,4 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} \cdot 1,4}$, можно выполнить вычисления по дей-

ствиям: вычислить произведение в числителе, затем произведение в знаменателе и первый результат разделить на второй. (Сделайте это самостоятельно.) А можно эту дробь преобразовать, сведя вычисления к действиям с целыми числами. Например, так:

$$\frac{0,4 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} \cdot 1,4} = \frac{(0,4 \cdot \frac{1}{3}) \cdot 6}{(\frac{5}{6} \cdot 1,4) \cdot 6} = \frac{0,4 \cdot 2}{5 \cdot 1,4} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 14} = \frac{4}{35}.$$

Какой способ вам кажется легче?

2) Найдите значение дроби, воспользовавшись удобным для вас способом:

а) $\frac{0,6 \cdot \frac{1}{7}}{\frac{5}{14} \cdot 1,8}$;

б) $\frac{\frac{2}{5} \cdot 0,4}{1,6 \cdot \frac{2}{3}}$;

в) $\frac{\frac{5}{6} - 0,3}{0,6 - 1\frac{1}{3}}$;

г) $\frac{\frac{4}{9} - 0,5}{0,3 - \frac{1}{3}}$.

Неверно!

Ученик, выполняя вычисления, записал такие равенства:

$$1 : \frac{2}{3} = \frac{2}{3}; 1,2 \cdot \frac{2}{3} = 0,8; \frac{4}{5} + 0,4 = 1,2; \frac{0,6}{1 - \frac{2}{3}} = 0,2.$$

Учитель сказал, что он дважды ошибся. Найдите неверные равенства и исправьте ответы.

26

Один турист за 3 мин проходит 200 м, а другой за 4 мин — 300 м. У кого из них скорость больше и на сколько километров в час?

27

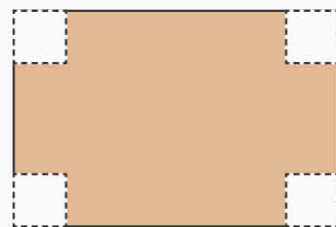
Легкоатлеты в процессе тренировки вырабатывают скоростную выносливость, увеличивая скорость во время бега. Например, бегун на дистанции 1500 м пробежал первые 250 м за 50 с, следующие 500 м — за 95 с и оставшиеся 750 м — за 140 с. Какую скорость (в км/ч) развил этот бегун на каждом из участков дистанции? (Результаты округляйте до десятых. Воспользуйтесь калькулятором.)

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

28

Чтобы удобнее было перевезти на дачу мелкие игрушки, отец предложил сыну сделать из листа картона размером 1,5 м × 1 м коробку с открытым верхом. Он объяснил, что для этого по углам листа надо вырезать одинаковые квадраты, загнуть края заготовки и обмотать коробку скотчем. Возник вопрос: какого размера должны быть эти квадраты? Очевидно, что сторона квадрата должна быть меньше 0,5 м. Понятно также, что коробка будет неудобной, если взять сторону равной 0,4 м или 0,1 м. (В первом случае коробка будет слишком узкой, во втором — слишком мелкой.) Более подходящими представляются такие размеры, как 0,15 м, 0,2 м, 0,25 м, 0,3 м, 0,35 м.

Выясните, выполнив необходимые вычисления, при какой из перечисленных длин стороны квадрата объём коробки будет наибольшим. (Используйте калькулятор.)



29

В нашей стране и в США для приближённой прикидки нормального веса взрослого человека пользуются разными формулами:

в России: $P = H - 100$, где P — вес в килограммах, H — рост в сантиметрах;

в США: $W = \frac{11}{2}H - 220$, где W — вес в фунтах, H — рост в дюймах.

Определите, какой вес считается нормальным в России и в США для человека ростом 180 см. Сравните полученные результаты. Расчёты выполняйте с помощью калькулятора. (Для справки: 1 фунт $\approx 0,454$ кг, 1 дюйм $\approx 2,54$ см.)

1.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что означает выражение a^n при любом натуральном n .
- Об употреблении степени при записи физических величин.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

$$a^1 = a$$

a^n читают так:

«а в степени эн» или
«а в энной степени»

Рассказывают, что индийский правитель предложил изобретателю шахмат выбрать себе награду за изобретение. Тот попросил дать ему 1 зерно риса за первую клетку шахматной доски, 2 — за вторую, 4 — за третью и т. д., удваивая число зёрен на каждой следующей клетке до 64-й. Правителю просьба о награде показалась скромной, но вскоре выяснилось, что выполнить её невозможно: число зёрен выразилось суммой

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}.$$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Вы уже знакомы с операцией возведения числа в степень, знаете, что вторую степень числа называют квадратом числа, третью — кубом числа. Теперь вы научитесь вычислять значения числовых выражений, содержащих степени с любым натуральным показателем, применять понятие степень в практических ситуациях.

ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ Произведение одинаковых множителей записывают короче — в виде степени:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n.$$

Число a называют **основанием степени**, а число n — **показателем степени**.

Например, $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = (-5)^3$.

Однако такой смысл этому выражению придаётся при $n \neq 1$ (ведь произведений из одного множителя не бывает). А чтобы выражение имело смысл при любом натуральном n , для случая $n = 1$ принимают специальное соглашение. Считают, что $a^1 = a$.



Степенью числа a с натуральным показателем n , бóльшим 1, называют произведение n множителей, каждый из которых равен a :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}, \quad n > 1.$$

Степенью числа a с показателем, равным 1, называют само число a :

$$a^1 = a.$$

Вычислить степень числа, или, как говорят, *вести число в степень*, можно путём последовательного умножения. Так, чтобы найти 2^5 , нужно четыре раза выполнить умножение на 2: $2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $2^3 = 4 \cdot 2 = 8$, $2^4 = 8 \cdot 2 = 16$, $2^5 = 16 \cdot 2 = 32$.

В то же время процесс возведения в степень можно сократить, если множители в произведении сгруппировать так, чтобы можно было использовать уже известные результаты. Например:

$$2^8 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^3 \cdot 2^5 = 8 \cdot 32 = 256.$$

Обратите внимание: степени числа 2 с увеличением показателя возрастают очень быстро. В самом деле,

$$\begin{aligned} 2^{10} &= 2^8 \cdot 2^2 = 256 \cdot 4 = 1024, \\ 2^{20} &= 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 = 1\,048\,576, \\ 2^{30} &= 2^{20} \cdot 2^{10} = 1\,048\,576 \cdot 1024 = 1\,073\,741\,824. \end{aligned}$$

1.2 ■ СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

Таким же свойством обладает любая степень с основанием, бóльшим 1. Эта особенность степени положена в основу древней индийской легенды об изобретателе шахмат. Прочитав легенду, вы узнаете, что награда для изобретателя шахмат оказалась равна огромному числу 18 446 744 073 709 551 615. Это число столь велико, что таким количеством зёрен можно было бы покрыть слоем в 1 см всю поверхность нашей планеты, включая Мировой океан.

Основание степени может быть любым числом — положительным, отрицательным, нулём. При возведении в степень отрицательного числа в результате может получиться как положительное, так и отрицательное число. Это зависит от того, чётным или нечётным числом является показатель степени.

Например:

$$\begin{aligned} (-2)^4 &= \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} = 16, \text{ т. е. } (-2)^4 > 0; \\ (-2)^5 &= \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-2) \cdot (-2)}_{+} \cdot \underbrace{(-2)}_{-} = -32, \\ &\text{т. е. } (-2)^5 < 0. \end{aligned}$$

Вообще полезно помнить:

! При возведении отрицательного числа в чётную степень получается положительное число, в нечётную степень — отрицательное.

a^n , a — отрицательное число	
$(-2)^4 > 0$	$(-2)^5 < 0$
$(-5)^2 > 0$	$(-5)^3 < 0$
$(-3)^6 > 0$	$(-3)^7 < 0$
$(-1,3)^{10} > 0$	$(-1,3)^9 < 0$

ЗАПИСЬ БОЛЬШИХ И МАЛЫХ ЧИСЕЛ Использование степеней делает выражение более компактным, «обозримым». Особенно часто степени употребляются при записи физических величин, которые, как известно, могут быть очень большими и очень маленькими. Их записывают с помощью степени с основанием 10. В справочниках можно увидеть, например, что масса Земли равна $5,976 \cdot 10^{24}$ кг, а масса атома водорода — $1,674 \cdot 10^{-24}$ г.

Понятно, что 10^{24} — это произведение 24 множителей, равных 10, т. е. масса Земли — $5,976 \cdot 10^{24}$ кг = 5 976 000 000 000 000 000 000 000 кг.

А что означает выражение 10^{-24} ? В математике это выражение считается степенью, но смысл у него иной, чем у степени с натуральным показателем. Если масса Земли выражается очень большим числом, то масса атома водорода очень мала. И нетрудно догадаться, что если в первом случае имеется в виду умножение на 10^{24} , то во втором — деление на 10^{24} .

масса атома водорода — $1,674 \cdot 10^{-24}$ г = $\frac{1,674}{10^{24}}$ г.

Иными словами, выражение 10^{-24} считают равным $\frac{1}{10^{24}}$.

Снежинки бывают очень маленькими, диаметром $2 \cdot 10^{-3}$ м и массой $2 \cdot 10^{-3}$ г. Тем не менее к концу зимы масса снежного покрова Северного полушария планеты достигает $1,35 \cdot 10^{13}$ тонн.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните, что означает выражение: a^5 ; a^1 .
- Зная, что $3^2 = 9$ и $3^3 = 27$, найдите сначала 3^5 , а затем 3^8 .
- От чего зависит знак степени с отрицательным основанием?
- Сравните с нулём: $(-5)^8$; $(-9)^7$.
- Выразите дробью массу $4 \cdot 10^{-3}$ г.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧТО ТАКОЕ СТЕПЕНЬ

30

Запишите каждое выражение в виде произведения или степени:

а) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$ и $2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2$;

б) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

в) $(-7) \cdot (-7)$ и $(-7) + (-7) + (-7)$;

г) $a + a + a + a$ и $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$;

д) $\underbrace{b \cdot b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{15 \text{ множителей}}$ и $\underbrace{b + b + b + \dots + b}_{10 \text{ слагаемых}}$;

е) $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_m \text{ множителей}$ и $\underbrace{x + x + x + \dots + x}_n \text{ слагаемых}$.

31

Выполните возведение в степень:

а) 5^4 ; б) $1,5^2$; в) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; г) $0,1^5$; д) $(-8)^3$; е) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$; ж) $(-0,2)^5$.

32

Найдите значение выражения $(-3)^n$ при $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

33

Прочитайте в объяснительном тексте, как выполнено вычисление 2^8 .Найдите $4^2, 4^3, 4^4$. Пользуясь полученными результатами, вычислите: $4^7, 4^9$.

34

Представьте разными способами 5^8 в виде произведения:

1) двух степеней с основанием 5;

2) трёх степеней с основанием 5.

ВЫЧИСЛЯЕМ ЗНАЧЕНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ

35

Вычислите:

а) $8 + 7^2, (8 + 7)^2, 8^2 + 7^2$;

в) $5 \cdot 2^4, (5 \cdot 2)^4, 5^4 \cdot 2^4$;

б) $(11 - 6)^3, 11 - 6^3, 11^3 - 6^3$;

г) $(10 : 2)^3, 10 : 2^3, 10^3 : 2^3$.

36

Запишите два выражения и вычислите их значения:

а) сумма квадратов чисел -3 и 4 , квадрат суммы чисел -3 и 4 ;б) квадрат разности чисел $0,3$ и $1,3$, разность квадратов чисел $0,3$ и $1,3$;в) разность кубов чисел 2 и 3 , куб разности чисел 2 и 3 ;г) куб суммы чисел $0,3$ и $-0,1$, сумма кубов чисел $0,3$ и $-0,1$.

37

Вычислите:

а) $5 \cdot (-3)^3 + 7$;

в) $5 \cdot (0,8 - 1,1)^3$;

б) $-30 - 10 \cdot (-0,1)^4$;

г) $7 \cdot (-1)^3 - (-1)^2 - 8$.

Неверно!

Ученик ошибся в записи одного из данных неравенств:

$(-25)^3 < 0; (-17)^3 < (-17)^2; (-10)^5 < (-10)^7.$

Объясните, в чём состоит ошибка, и запишите неравенство правильно.

38

а) Объём пирамиды, в основании которой квадрат (рис. 1.1), вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}a^2h$. Найдите объём пирамиды, если $a = 7$ см, $h = 10$ см. (Ответ округлите до единиц.)

б) Объём цилиндра, диаметр основания которого равен его высоте (рис. 1.2), можно приблизительно вычислить по формуле $V \approx \frac{3d^3}{4}$. Найдите объём цилиндра при $d = 1,2$ м. (Ответ округлите до десятых.)

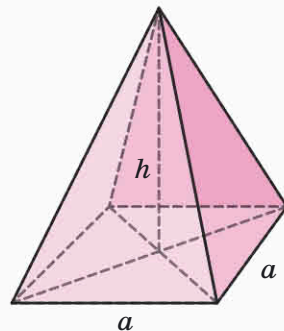


Рис. 1.1

39

Расположите в порядке возрастания числа:

- а) $-1,2$; $-1,2^2$; $1,2$; $(-1,2)^2$;
б) $0,15$; $-0,15$; $(-0,15)^2$; $(-0,15)^3$.

40

Сравните числа a и a^2 , если известно, что:
а) $a < 0$; б) $0 < a < 1$; в) $a > 1$.

Подсказка. Проведите числовой эксперимент.

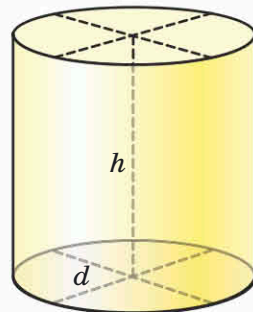


Рис. 1.2

ЗАПИСЫВАЕМ БОЛЬШИЕ И МАЛЫЕ ЧИСЛА

41

Представьте в виде степени с основанием 10 следующие числа:

- 1) 10; 100; 1000; 10 000; 100 000; 1 000 000;
2) 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; 0,000001.

42

Запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:

- а) 312 586; б) 2 432 750; в) 48 017; г) 536 900; д) 7 804 020.

Образец. $27\ 135 = 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$.

43

Запишите значение указанной величины с помощью натурального числа или десятичной дроби:

- 1) расстояние от Земли до звезды Сириус равно $8,19 \cdot 10^{13}$ км;
2) радиус молекулы воды равен $1,4 \cdot 10^{-7}$ мм.

44

Используя степени числа 10, выразите:

- 1) 1 км в метрах, в сантиметрах, в миллиметрах;
2) в метрах 1 см, 1 мм, 1 мк (1 мк — один микрон, тысячная доля миллиметра).

45

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Лист бумаги несколько раз перегнули пополам. Толщина листа 0,1 мм.

1) Чему будет равна толщина сложенного листа, если его перегнули 6 раз? Запишите ответ, используя степень числа 2, и вычислите значение получившегося выражения.

2) Запишите формулу для вычисления толщины сложенного листа, обозначив буквой T толщину сложенного листа и буквой n число перегибаний.



1.3

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

● Как переходить от процентов к десятичной дроби и от десятичной дроби к процентам.

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как решаются основные задачи на дроби.
- Что такое процент.
- Как решать основные задачи на проценты.

0,12 — это 12 %;
12 % — это 0,12.

Русское слово «процент» произошло от латинского выражения *pro centum*, что в переводе означает «на сто». Интересно, что, например, во французском языке оно сохранилось почти в первоначальном виде и состоит из двух слов: *pour cent*.

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ

Проценты сопровождают нас повсюду, а не только на школьных уроках. Трудно представить себе речь современного человека, в которой в той или иной ситуации не звучало бы слово «процент». Мы говорим: «на все сто процентов», «работать за проценты», «девяносто процентов против десяти» и т. п. Чтобы свободно оперировать этим понятием, надо владеть некоторым небольшим объёмом базовых умений, связанных с процентами.

ЗАПИСЬ ПРОЦЕНТОВ В ВИДЕ ДРОБИ И ДРОБИ В ВИДЕ ПРОЦЕНТОВ

Вы уже знаете, что под процентом понимают $\frac{1}{100}$ долю величины. Вы будете легко решать задачи на проценты, если научитесь свободно переходить от процентов к дробям и наоборот.

Пример. Известно, что 0,12 всего бюджета школы потрачено на покупку канцелярских принадлежностей. Выразим эту величину в процентах.

Так как $\frac{1}{100}$ часть бюджета — это 1 %, а $0,12 = \frac{12}{100}$, то на покупку канцелярских принадлежностей потрачено 12 % школьного бюджета.

На этом примере нетрудно подметить, как перейти от десятичной дроби к процентам коротким путём, опуская приведённые рассуждения.



Чтобы часть величины, заданную десятичной дробью, выразить в процентах, можно в этой дроби перенести запятую на два знака вправо и к полученному числу приписать знак %.

Например:

0,36 некоторой величины — это 36 % этой величины;
0,445 некоторой величины — это 44,5 % этой величины.

Для обратного перехода — от процентов к десятичной дроби — запятую переносят в обратном направлении.



Чтобы часть величины, заданную в процентах, выразить десятичной дробью, можно в числе, стоящем перед знаком %, перенести запятую на два знака влево.

Например:

36 % некоторой величины — это 0,36 этой величины;
44,5 % некоторой величины — это 0,445 этой величины.



Чтобы выразить в процентах часть величины, выраженную обыкновенной дробью, нужно сначала эту дробь обработить в десятичную:

$$\frac{5}{8} = 0,625, \text{ или } 62,5\%; \frac{1}{3} \approx 0,33, \text{ или примерно } 33\%.$$

Полезно помнить, как выражаются в процентах некоторые обыкновенные дроби. Примеры таких дробей приведены на полях.



Дроби	Проценты
$\frac{1}{10}$	10 %
$\frac{1}{5}$	20 %
$\frac{1}{4}$	25 %
$\frac{1}{2}$	50 %
$\frac{3}{4}$	75 %



ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ Поскольку проценты выражаются дробями, то задачи на проценты, по существу, являются теми же задачами на дроби.

Задача 1. Процент от числа

В городе N проживает 60 тыс. человек: 20 % из них — дети и подростки до 16 лет, 24 % — люди, достигшие пенсионного возраста. Какова численность взрослого населения города, не достигшего пенсионного возраста?

Решение. Численность всего населения города составляет 100 %. А на взрослых, не достигших пенсионного возраста, приходится $100\% - (20\% + 24\%) = 56\%$.

Найдём 56 % от 60 тыс.: 56 % — это 0,56 всего населения. Получили знакомую задачу на нахождение части от числа. Такая задача решается умножением:
 $60\,000 \cdot 0,56 = 33\,600.$

Ответ: 33 600 человек.

Задача 2. Число по проценту

Банк предлагает вклад, условия которого таковы: клиент вносит деньги на счёт на один год, по истечении которого получает доход, равный 12,5 % от вложенной суммы. Какую сумму надо положить на счёт, чтобы доход составил 5000 р.?

Решение. 5000 р. составляют 12,5 %, или, иначе, 0,125 от вложенной суммы. Нужно решить знакомую задачу: найти целое по его части. Такая задача решается делением:

$$5000 : 0,125 = 40\,000.$$

Ответ: 40 000 р.

Задача 3. Сколько процентов

В начале года услугами интернет-компании пользовалось 12 000 человек. В течение года это число выросло на 3000 человек. На сколько процентов увеличилось число клиентов интернет-компании?

Решение. Чтобы найти, сколько процентов от 12 000 составляют 3000, надо найти, какую часть составляют 3000 от 12 000, или, иными словами, отношение 3000 к 12 000, и выразить это отношение в процентах:

$$\frac{3000}{12\,000} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Так как 0,25 — это 25 %, то число клиентов интернет-компании выросло на 25 %.

Происхождение знака % имеет много версий. Одна из наиболее правдоподобных прослеживается в истории постепенного преобразования знака, обозначающего процент. Он возник из графического изображения слов *pro cento*, в котором *pro* сначала заменялось на букву *p*, а затем эта буква исчезла из изображения. Осталось слово *cento*, которое изображалось двумя кружками, разделёнными горизонтальной чертой. Затем по разным причинам эта черта превратилась в наклонную и знак приобрёл современный вид.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Выразите в процентах 0,8 некоторой величины. Объясните, как вы рассуждали.
- Выразите десятичной дробью 35 % некоторой величины. Объясните, как вы рассуждали.
- Какие три основные задачи на проценты вы знаете? Придумайте сами пример для каждой из них и покажите, как они решаются.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРОЦЕНТ ОТ ЧИСЛА

46

а) Части городского бюджета, предназначенные для некоторых нужд города, выражаются следующими десятичными дробями: 0,06; 0,34; 0,6; 0,155. Выразите эти десятичные дроби в процентах.

б) На выборах в городскую администрацию пять кандидатов на одно место получили соответственно 63 %, 25 %, 10,5 %, 0,93 % и 0,57 % голосов избирателей. Выразите эти проценты десятичными дробями.

47

а) Выразите в процентах обыкновенные дроби: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{7}{25}$; $\frac{5}{8}$; $\frac{11}{40}$.

б) Выразите в процентах приближённо, округляя до целых, следующие обыкновенные дроби: $\frac{7}{16}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{2}{9}$.

48

На диаграмме (рис. 1.3) представлены результаты опроса, в котором участвовали 1200 школьников. Был задан вопрос: «Для чего вы покупаете велосипед?» Найдите недостающие на диаграмме данные и вычислите, сколько человек дали каждый из ответов.



Рис. 1.3

49

Представьте на круговой диаграмме состав витаминного чая: шиповник — 33,4 %, чабрец — 16,6 %, мёд — 50 % (используйте калькулятор; угловую величину сектора округляйте до целых).

50

а) В магазин привезли 160 упаковок овощных и фруктовых консервов. Овощные консервы составили 75 % привезённого товара. Какое количество упаковок фруктовых консервов привезли в магазин?

б) Государству принадлежит 87 % акций предприятия, остальные принадлежат другим акционерам. Общая прибыль предприятия после уплаты налогов за год составила 50 млн р. Какая сумма (в рублях) из этой прибыли должна пойти на выплату другим акционерам?



51

а) Автомобильный завод за полгода увеличил выпуск автомобилей на 12,5 %. Сколько автомобилей в неделю (7 рабочих дней) стал выпускать завод, если в начале года он выпускал 120 автомобилей ежедневно?

б) Цена акций некоторого предприятия в течение месяца увеличилась на 1,8 %. Сколько стал стоить пакет из 50 акций, если в начале месяца одна акция стоила 180 р.?

52

а) Из 850 учащихся школы 80 % занимаются в спортивных секциях, причём 5 % из них — в шахматной. Сколько учащихся школы не занимается в шахматной секции?

б) Среди 70 тыс. жителей города 65 % не интересуются хоккеем и никогда не смотрят его по телевизору, а остальные являются хоккейными болельщиками. Среди хоккейных болельщиков половина смотрели по телевизору финальную игру чемпионата мира. Сколько жителей города не посмотрело этот матч?

53

- 54

- 55

- 56

Рис. 1.4

- 57



Рис. 1.5

- 58

- 59

- 60

б) В школьном оркестре играют 12 % мальчиков и 8 % девочек. Сколько всего процентов учащихся школы играет в оркестре, если мальчики составляют $\frac{3}{5}$ всех учащихся школы?

1.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Где применяются проценты в реальной жизни.
- Как применить свои знания для проведения процентных вычислений.

В Древнем Риме задолго до того, как была введена десятичная система, в денежных расчётах применялись доли, кратные $\frac{1}{100}$. Например, в IV в. до н.э. существовал налог с каждого продаваемого предмета, равный $\frac{1}{100}$ его стоимости (*centesima rerum venalium*). Вычисления с этими долями были похожи на вычисления с процентами. Постепенно такая практика расширялась применительно к прибыли и убытку, росту капитала, процентным ставкам, и к XVII в. проценты окончательно вошли в жизнь.



Рельефы из Неймегена.
Уплата налогов или арендной
платы. III в. н.э.
Музей земли Рейнланд. Трир.

Свои «проценты» были и в Древнем Вавилоне (за 2000 лет до н.э.), только там их выражали не в сотых, а в шестидесятых долях, так как использовали шестидесятеричную систему счисления.

ПРОЦЕНТЫ ВОКРУГ НАС

Проценты — одно из математических понятий, которые находят широкое применение в повседневной жизни. Прибыли и убытки, банковские вклады и акции, повышение цен, скидки, кредиты и др. — всё это требует понимания процентов. Проценты часто можно увидеть в таблицах и на диаграммах, без которых не обходится ни одна информационная телепередача.

«БОЛЬШИЕ» И «МАЛЕНЬКИЕ» ПРОЦЕНТЫ На практике часто приходится иметь дело с «маленькими» процентами, меньшими, чем 1 %. Это бывает, когда речь идёт о долях какой-либо величины, меньших 0,01.

Пример 1. На этикетке поливитаминного препарата написано, что 0,003 его состава приходится на витамин В. Выразим эту дробь в процентах, получим, что витамин В составляет 0,3 % массы таблетки поливитаминов.

«Большие» проценты, превосходящие 100 %, встречаются в ситуациях, когда проценты используются для сравнения величин и новая величина больше исходной.

Пример 2. Цена железнодорожного билета в январе выросла на 30 %. Новая цена стала составлять 100 % + 30 % = 130 % прежней цены. Выразим 130 % десятичной дробью, получим, что цена выросла в 1,3 раза.

Рост цены билета на 100 % означает, что она стала составлять 200 % прежней цены, т. е. выросла в 2 раза.

Рост цены билета на 500 % означает, что она стала составлять 600 % прежней цены, т. е. выросла в 6 раз.

ЦЕНЫ, ПЛАТЕЖИ

Задача 1. Зонт стоил 1200 р. В конце года его цена была дважды снижена: в ноябре на 15 %, а в декабре ещё на 15 %. Сколько стал стоить зонт в декабре?

Решение. Способ 1. Сначала узнаем, на сколько рублей подешевел зонт в ноябре, т. е. найдём 15 % от 1200 р.:

$$15 \% \text{ цены} — \text{это } 0,15 \text{ цены: } 1200 \cdot 0,15 = 180 \text{ (р.)}.$$

Теперь можно узнать ноябрьскую цену зонта:

$$1200 - 180 = 1020 \text{ (р.)}.$$

Второе снижение цены происходило, когда зонт уже имел новую стоимость, и 15 % следует находить от этой новой стоимости, т. е. от 1020 р.:

$$1020 \cdot 0,15 = 153 \text{ (р.)}.$$

$$\text{Декабрьская цена зонта равна } 1020 - 153 = 867 \text{ (р.)}.$$

Способ 2. Ноябрьская цена зонта стала меньше первоначальной на 15 % и составила 100 % - 15 % = 85 % от первоначальной цены. Найдём 85 % от 1200 р.:

$$85 \% \text{ цены} — \text{это } 0,85 \text{ цены: } 1200 \cdot 0,85 = 1020 \text{ (р.)}.$$

Декабрьская цена составила 85 % от 1020 р.:

$$1020 \cdot 0,85 = 867 \text{ (р.)}.$$



Обратите внимание на следующее. Снижение цены дважды на 15 % не равно снижению этой цены на 30 %. Убедимся в этом. Цена зонта — 1200 р. — после двукратного снижения на 15% стала равна 867 р., т. е. уменьшилась на 333 р. Это составило $\frac{333}{1200} = 0,2775$, т. е. 27,75 % от первоначальной цены. Иногда в бытовых ситуациях достаточным бывает приближённый ответ. Округлим 27,75 % до целых, получим, что зонт подешевел примерно на 28 %.

ПРОИЗВОДСТВО. БИЗНЕС

Задача 2. В газете помещена статья о новом ежемесячном журнале. В ней сообщалось, что сначала тираж журнала составил 300 экземпляров, а через полгода вырос на 350 %. Каким стал новый тираж журнала?

Решение. Примем начальный тираж журнала за 100 %. Через полгода он увеличился на 350 % и стал равным $100 \% + 350 \% = 450 \%$ от начального тиража. Так как 450 % тиража — это 4,5 тиража, то новый тираж в 4,5 раза больше начального, т. е. он равен $300 \cdot 4,5 = 1350$ (экз.).

Задачу можно решить и иначе: сначала вычислить, на сколько экземпляров вырос тираж, т. е. найти 350 % от 300, а затем прибавить полученное число к начальному тиражу журнала.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Задача 3. Численность населения России на 1 декабря 2012 г. составила 143 млн человек и в январе следующего года возросла на 276 тыс. человек. На сколько процентов увеличилась за указанный период численность населения России?

Решение. Найдём, сколько процентов от 143 млн составляют 276 тыс. Выразим 143 млн в тысячах, получим 143 000 тыс. Найдём отношение $\frac{276}{143\,000}$:
 $\frac{276}{143\,000} \approx 0,00193$, т. е. примерно 0,19 %.

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ СОСТАВ ВЕЩЕСТВА

Задача 4. К 200 г 30 %-ного раствора соли долили 100 г воды. Сколько процентов соли в получившемся растворе?

Решение. Слова «30 %-ный раствор соли» означают, что соль составляет 30 % всей массы раствора. Значит, её масса равна $200 \cdot 0,3 = 60$ (г).

После того как в раствор долили 100 г воды, его масса стала равной 300 г, а количество соли в нём не изменилось. Найдём отношение массы соли к общей массе полученного раствора и выразим его в процентах:

$$\frac{60}{300} = \frac{1}{5} = 0,2. \text{ Значит, в растворе } 20 \% \text{ соли.}$$

Муниципальное общеобразовательное учреждение
ВЕЩНИК ОБРАЗОВАНИЯ
Газета посвящена и школе, и жизни

Ваш журнал
НОВЫЙ ЖУРНАЛ
Информационный журнал
для школьников и учителей
содержит интересные материалы
по различным предметам
и вопросам школьной жизни
и жизни школы в целом.
Журнал является обязательным
для всех школ и учителей.
Журнал является обязательным
для всех школ и учителей.
Журнал является обязательным
для всех школ и учителей.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Выразите десятичной, а затем обыкновенной дробью 0,04 % массы таблетки поливитамина.
- Какой процент от первоначального тиража книги составил следующий тираж, если он увеличился на: а) 50 %; б) 100 %; в) 250 %? Во сколько раз увеличился тираж в каждом случае?
- Найдите в литературе, средствах массовой информации примеры, содержащие процентные данные, и составьте с этими данными задачу.

УПРАЖНЕНИЯ

«БОЛЬШИЕ» И «МАЛЕНЬКИЕ» ПРОЦЕНТЫ

- 61 Выразите десятичной, а затем обыкновенной дробью: $0,4\%$; $0,06\%$; $0,125\%$.
- 62 1) Во сколько раз выросла цена товара, если она увеличилась на 40% ; на 50% ; на 100% ?
2) Во сколько раз уменьшилась цена товара, если она снижена на 50% ; на 80% ; на 90% ?
- 63 На сколько процентов увеличились тарифы на железнодорожный проезд, если они выросли в 2 раза; в 3 раза; в 5 раз?

ЦЕНЫ, ПЛАТЕЖИ

- 64 Спортивный магазин проводит акцию: «Любая футболка по цене 300 р. При покупке двух футболок одновременно скидка на вторую 10% ». Сколько придётся заплатить за покупку двух футболок? пяти футболок?
- 65 Стоимость проезда в пригородном электропоезде составляет 198 р. Школьникам предоставляется скидка 50% .
а) Сколько рублей стоит проезд группы из 4 взрослых и 12 школьников?
б) Составьте свою группу из взрослых и детей и вычислите стоимость проезда этой группы.
- 66 Фирма, проводящая обучающие семинары, дала следующее объявление: «Стоимость участия в семинаре — 2000 р. с человека. Группам от организаций предоставляются скидки: от 4 до 10 человек — 6% ; более 10 человек — 10% ». Организация направляет на обучение две группы сотрудников. Одна из них состоит из 5 человек, вторая — из 12. Какую сумму должна заплатить организация за обучение этих двух групп?
- 67 В понедельник некоторый товар поступил в продажу по цене 6000 р. В соответствии с принятыми в магазине правилами цена товара в течение недели остаётся неизменной, а в первый день каждой следующей недели снижается на 5% от предыдущей цены. Сколько рублей будет стоить товар на десятый день после поступления в продажу? на семнадцатый день?
- 68 Фильтр для воды, стоивший 1500 р. в магазинах А, В и С, на распродаже был уценён:
– в магазине А дважды: на 40% , а через неделю ещё на 5% ;
– в магазине В дважды: на 5% , а через неделю ещё на 40% ;
– в магазине С один раз на 45% .
В каком магазине выгоднее купить этот товар?
- 69 В СМИ иногда бывают ошибочные утверждения, связанные с процентными расчётами. Ниже приведены некоторые выдержки из газет. Определите, какие из утверждений неверны, и исправьте их:
1) За два года тарифы на электроэнергию дважды повышались на 50% , и в итоге рост цен составил 100% .

- 2) В связи с инфляцией цены на автобусные билеты были повышены в 2 раза, т. е. выросли сразу на 200 %.
- 3) С конца августа до октября цены на яблоки дважды снижались на ярмарках на 50 %, и сейчас они составляют 25 % от первоначальной цены.

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ИНФОРМАЦИЯ

Рис. 1.6

70

На диаграмме (рис. 1.6) представлены результаты опроса «Почему ты покупаешь смартфон?». Было опрошено 1600 студентов, каждый мог выбрать более одного ответа. Вычислите, сколько человек дали каждый из ответов.

Быстрее доступ в Интернет	43 %
Удобнее сенсорный экран	33 %
Более привлекательный дизайн	26 %
Чтобы слушать музыку	23 %
Чтобы смотреть видео	18 %

71

В таблице приведены данные о росте числа абонентов МТС за третий квартал 2012 г. На сколько процентов выросло число абонентов на каждой территории? Результат округлите до десятых. (Для вычислений воспользуйтесь калькулятором.)

Территория	Число абонентов (млн)	
	30.06.2012	30.09.2012
Россия	69,59	70,73
Москва и Московская область	13,07	13,46
Санкт-Петербург и Ленинградская область	3,66	3,73
Остальные регионы России	52,87	53,53

72

В газете города N опубликована статья с отчётом о проведённых выборах главы городской администрации: «Из 450 тыс. жителей нашего города 76 % занесены в избирательные списки. Чтобы выборы состоялись, необходимо, чтобы в голосовании приняло участие не менее 25 % избирателей. В день выборов проголосовали 93 тыс. жителей». Как вы думаете, можно ли считать, что выборы состоялись?

КОЛИЧЕСТВЕННЫЙ СОСТАВ ВЕЩЕСТВА

73

В состав одного из витаминно-минеральных комплексов входят минеральные вещества в следующих количествах: кальций и фосфор — по 4 %, магний — 1,6 %, железо — 0,07 %, цинк — 0,06 %. Сколько миллиграммов каждого из этих веществ содержится в одной таблетке, масса которой 1500 мг?

74

Морская вода содержит 5 % соли. а) К 40 кг этой воды добавили 10 кг пресной. Сколько процентов соли в полученном растворе? б) Сколько килограммов пресной воды нужно добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в смеси составило 2 %?

75

Имеется творог двух сортов: жирный содержит 20% жира, а нежирный — 5% жира. Определите процент жирности полученного творога, если смешали:

а) 2 кг жирного и 3 кг нежирного творога;

б) 3 кг жирного и 2 кг нежирного творога.



1.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие статистические характеристики относят к средним.
- Что нахождение средних не всегда позволяет делать надёжные выводы, после чего познакомитесь со статистическими характеристиками разброса данных.

Среднее арифметическое ряда отметок:

$$5 + 2 + 4 + 5 + 5 + 4 + 4 + 5 + 5 + 5 = 4,4.$$

Статистика — отрасль знаний, которая занимается вопросами сбора, измерения и анализа массовых данных. Термин происходит от латинского *status* — состояние дел.

Начало практики сбора статистической информации относится ко времени возникновения государств: в Древнем Китае проводились переписи населения, в Древнем Риме вёлся учёт имущества граждан, проводилось сравнение военного потенциала различных государств. Первой же опубликованной статистической информацией можно считать глиняные таблички Шумерского царства (III — II тыс. лет до н. э.).



СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Многие величины, с которыми мы сталкиваемся в жизни, меняют свои значения. Иногда причины изменений известны, иногда — нет. Для описания таких изменений используют понятие **случайной изменчивости**. Однако и при случайной изменчивости величин можно обнаружить некоторые закономерности. В этом помогают **статистические характеристики**.

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ Какую четвертную отметку по алгебре получит ученик, у которого в течение четверти были, например, такие отметки: 5, 2, 4, 5, 5, 4, 4, 5, 5, 5? Чаще всего ученики решают проблему четвертной отметки следующим образом: складывают все отметки и делят сумму на их количество после чего полученное число округляют, если необходимо. Для нашего ученика мы получим 4,4. Это число есть среднее арифметическое исходных чисел.



Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Найти среднее арифметическое можно было немного иначе. Двойку ученик получил только один раз, четвёрку — 3 раза, а пятёрку у него было 6. Поэтому быстрее среднее арифметическое можно подсчитать так:

$$\frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 6}{10} = 4,4.$$

МОДА Среднее арифметическое является важной характеристикой ряда чисел, но иногда полезно рассматривать и другие *средние*. Например, претендуя на отметку «5», ученик может использовать такой аргумент: «Чаще всего в четверти я получал пятёрки!» Статистик в этом случае сказал бы иначе: «Модой этого ряда является число 5».



Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто.

В отличие от среднего арифметического, которое можно вычислить для любого числового ряда, моды у ряда вообще может не быть. Например, если ученик получил отметки 4, 2, 3, 5, то каждая отметка встречается в этом ряду только один раз и среди них нет числа, встречающегося чаще других.

Такой показатель, как мода, используется не только для числовых данных. Вы уже знакомы с социологическими опросами. Если, например, опросить большую группу учеников, какой школьный предмет им нравится больше других, то модой ряда ответов будет предмет, который назван чаще остальных. Может случиться, что таких предметов будет 2. В подобных случаях говорят о мультимодальности ряда данных.



Мода — показатель, который широко используется в статистике, например при изучении спроса. Скажем, при решении вопроса: «Какие открывать авиарейсы», предварительно изучается спрос и выявляется мода — наиболее часто встречающийся заказ.

ПОКАЗАТЕЛИ РАЗБРОСА Известно, что на планете Меркурий средняя температура $+15^\circ\text{C}$. Исходя из этого статистического показателя можно подумать, что на Меркурии умеренный климат, удобный для жизни людей. Однако это не так. Температура на Меркурии колеблется от наименьшего значения -150°C до наибольшего значения $+350^\circ\text{C}$. Значит, если у нас есть ряд данных, то для обоснованных выводов и надёжных прогнозов на их основе, помимо средних значений, надо ещё указать, насколько эти данные различаются между собой. Одним из статистических показателей различия, или разброса, данных является размах.



Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

Для температуры на планете Меркурий размах равен $350^\circ\text{C} - (-150^\circ\text{C}) = 500^\circ\text{C}$. Конечно, такого перепада температур человек выдержать не может.

Помимо размаха, во многих случаях важны **наибольшие** или **наименьшие** значения данных. Например, если для исследования поверхности Меркурия посылается космический аппарат, важно, чтобы он работал и при наибольших, и при наименьших температурах. Изменчива температура воздуха не только в космосе, но и на Земле. Например, средняя температура в июле в Москве (за годы наблюдения) составляет 19°C , максимальная — 38°C , минимальная — 0°C . В таблице дана средняя температура в июле с 2004 по 2012 г.

Год	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
$t, ^\circ\text{C}$	19	19	18	19	19	19	26	23	21



Примеры случайных событий:

температура человеческого тела;
 напряжение в электрических сетях;
 стоимость барреля нефти на бирже.



Примеры средних в экономике:

средняя цена;
 средняя зарплата;
 средняя урожайность.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Найдите среднее арифметическое ряда чисел:
 а) 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; б) 4, 3, 4, 3.
- Каким было бы среднее арифметическое ряда отметок из фрагмента «Среднее арифметическое», если бы в этом ряду не было двойки? Каков размах ряда отметок? Каким был бы размах ряда, если бы в нём не было двойки?
- Проведите опрос и узнайте, какой школьный предмет нравится учащимся вашего класса больше других.

УПРАЖНЕНИЯ

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ И МОДА

76

Найдите среднее арифметическое и моду (если она есть) ряда:

- а) 13, 15, 13, 12, 12, 12, 13, 14, 13, 15, 13;
 б) 39, 54, 33, 36, 20, 29, 35, 50, 21.

77

Измерив рост двенадцати солдат подразделения, получили следующие данные (в см): 178, 169, 191, 182, 171, 173, 174, 180, 179, 164, 178, 185. Найдите средний рост солдат подразделения и число солдат выше среднего роста. (Используйте калькулятор.)

78

В отделе мужской обуви универмага в течение дня производился учёт размеров купленной обуви. Были получены следующие результаты: 44, 40, 43, 39, 42, 42, 42, 45, 41, 43, 43, 41, 42, 46, 40, 41, 42, 39, 42, 45, 42, 43, 44, 44, 41, 42. Чему равна мода ряда размеров купленной обуви и что характеризует этот показатель?

79

Средняя масса волнистых попугайчиков школьного живого уголка 42 г. Масса Таниного любимого попугайчика равна 43 г. Верны ли следующие утверждения?

- а) Все попугайчики, кроме Таниного любимца, имеют массу 42 г.
 б) Массы всех попугайчиков живого уголка, кроме Таниного любимца, меньше 42 г.
 в) В уголке есть попугайчик, масса которого меньше 42 г.
 г) В уголке есть попугайчик, масса которого равна 41 г.

80

В таблице представлены данные о количестве детей в семьях города.

Число детей в семье	0	1	2	3	4	5	6
Число семей	255	320	210	80	18	6	1

Найдите среднее число детей в семье и моду (количество детей в наиболее типичной семье). (Используйте калькулятор.)

81

Завуч школы подвела итоги контрольной работы по алгебре в 7 классах и представила результаты на круговой диаграмме (рис. 1.7). Найдите моду ряда отметок и средний результат по контрольной работе.

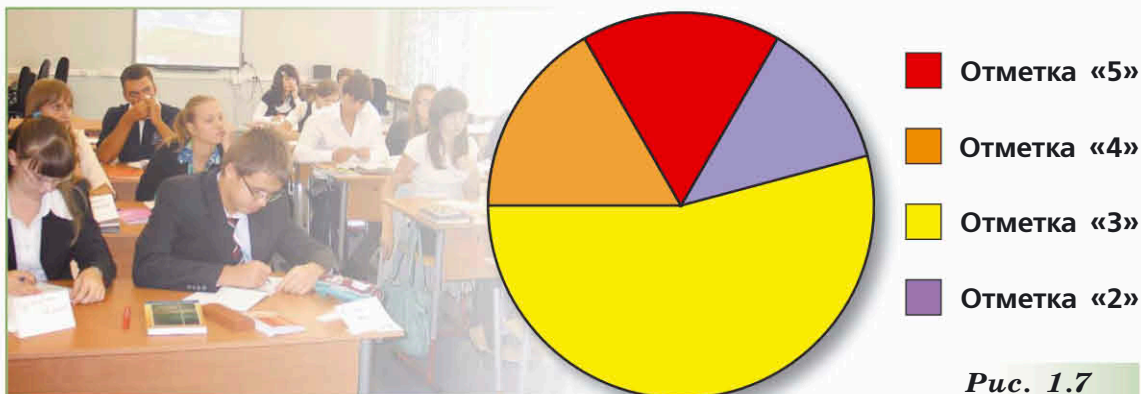


Рис. 1.7

РАЗНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

82

На диаграмме (рис. 1.8) представлены данные о числе болельщиков, посетивших футбольные матчи на стадионе «Динамо» в Москве за месяц. Найдите размах посещаемости и среднюю посещаемость матча, округлив её до сотен. (Используйте калькулятор.)

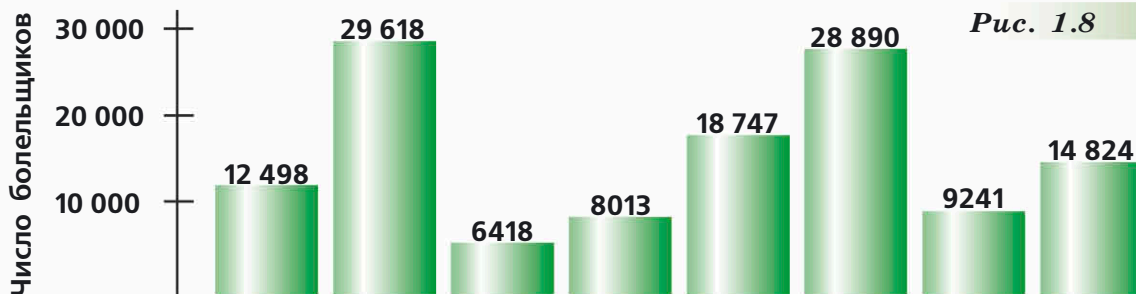


Рис. 1.8

83

На соревнованиях по фигурному катанию на коньках в спортивной школе судьи поставили участнику следующие оценки: 5,5; 5,4; 4,9; 5,3; 5,0; 5,3; 5,4; 5,7; 5,4. Найдите размах и моду ряда оценок. Отбросьте наибольшую и наименьшую оценки и найдите средний балл этого участника.

84

Для службы в Президентском полку отбирают призывников с ростом не менее 175 см и не более 190 см.

а) Можно ли утверждать, что средний рост солдат этого полка равен 182,5 см?

б) Есть три группы призывников, про которые известно, что:

в первой группе средний рост равен 180 см;

во второй группе максимальный рост равен 180 см;

в третьей группе минимальный рост равен 180 см.

В каждой ли из этих групп заведомо есть призывник, годный к службе в Президентском полку?

85

Директор фирмы решил начать борьбу с курением и провел анализ заболеваемости своих сотрудников. Он выписал число рабочих дней, пропущенных в течение года по болезни каждым сотрудником, предварительно разбив их на две группы — курящие и некурящие. Получились такие результаты:

Курящие: 7, 5, 2, 6, 4, 4, 6, 7, 9, 7, 0, 8, 11, 8.

Некурящие: 3, 3, 6, 0, 3, 6, 2, 2, 4, 5, 13, 4, 3, 2, 2, 3, 4, 5, 6, 4.

Директор сделал по этим результатам убедительные выводы о вреде курения. Сделайте и вы то же самое.

86

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Вычислите среднее арифметическое ряда: 2, 8, 16, 24, 30, 40.

Используя полученный результат, попробуйте догадаться, чему равны средние арифметические следующих рядов:

а) 12, 18, 26, 34, 40, 50;

б) 20, 80, 160, 240, 300, 400.

Проверьте себя с помощью вычислений.

2) Как изменится среднее арифметическое ряда, если:

а) ко всем членам ряда прибавить одно и то же число;

б) все члены ряда умножить на одно и то же положительное число?

Изменяются ли при этом мода и размах?

1.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие события называют случайными.
- Как оценить шанс случайного события.
- Какие случайные события равновероятны.

Примеры случайных событий:

- погодные явления;
- природные катастрофы;
- биржевые цены (на газ, золото и т. п.);
- результаты спортивных соревнований.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

«Солнце взойдёт». «Вы выиграете в лотерее». «Петух запоёт соловьём». Это примеры событий. Первое из них произойдёт обязательно, второе может произойти или не произойти, третье не произойдёт никогда. Как часто играют в лотереи? Оказывается, здесь есть определённые закономерности. Изучением закономерностей в мире случайного и занимается специальная наука — *теория вероятностей*.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ Говорят: «это возможно», «это невозможно», «это маловероятно», «это должно случиться». Подобные выражения обычно используют, когда речь идёт о возможности наступления события, которое в одних и тех же условиях может произойти, а может и не произойти. Такие события называют **случайными**.

Есть события, которые в определённых условиях происходят всегда, например, солнце всегда восходит на востоке; их называют **достоверными**. Есть события, которые при данных условиях никогда не происходят, например, петух никогда не запоёт соловьём; их называют **невозможными**.



В теории вероятностей достоверные и невозможные события принято считать случайными.

Пример 1. Бросают игральный кубик. Рассмотрим следующие события:

- A: выпадет семь очков;
- B: выпадет меньше десяти очков;
- C: выпадет пять очков;
- D: выпадет чётное число очков.

При бросании кубика всего возможно 6 значений выпавших очков: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Событие A невозможное: при бросании кубика не может выпасть семь очков.

Событие B достоверное: всегда выпадает меньше десяти очков.

События C и D могут произойти, а могут и не произойти. Чтобы показать это, надо привести пример ситуации, когда данное событие происходит, и ситуации, когда оно не происходит. Например, событие D произойдёт, если выпадет два, четыре или шесть очков, и не произойдёт, если выпадет одно, три или пять очков.

ШАНСЫ На устном экзамене ученик берёт один из экзаменационных билетов, шансы взять любой из них равны. Случайные события, которые имеют равные шансы, называют **равновозможными** или **равновероятными**.



Но события не всегда равновозможные. Будильник может не зазвонить, лампочка — не загореться, автобус — не прийти, правда, все эти события в обычных условиях маловероятны. Более вероятно, что будильник зазвонит, лампочка загорится, автобус придёт. У одних событий шансов произойти больше, значит, они более вероятны, а у других шансов меньше, они менее вероятны. У невозможных событий нет никаких шансов произойти, а достоверные произойдут обязательно.

Выясним, каковы шансы наступления событий из примера 1. У события B (оно достоверное) есть все шансы произойти, а у события A (оно невозможное) нет ни одного. У события C есть только один шанс из шести. Чётное число очков есть на трёх гранях кубика из шести, значит, есть три шанса из шести, что событие D произойдёт. Значит, событие D вероятнее события C .



Шансы имеет смысл сравнивать как дроби: в знаменателе дроби — сколько всего возможно случаев, в числителе — сколько из них отвечают конкретному событию.

На трёх гранях кубика чётное число очков, а на трёх нечётное, значит, события «выпадет чётное число очков» и «выпадет нечётное число очков» равновероятны. Эти два события интересны ещё и тем, что если происходит одно из них, то другое не происходит. Такие события называют *противоположными*. Противоположные события совсем не обязательно равновероятны. Убедитесь в этом: сформулируете событие, противоположное событию C , и оцените его шансы.

РИСУЕМ КРУГИ ЭЙЛЕРА Показывать отношение событий удобно с помощью кругов Эйлера.

Пример 2. Из перетасованной колоды карт вынимают одну карту. Изобразим с помощью кругов Эйлера, как соотносятся друг с другом события:

A : вынута карта пиковой масти;

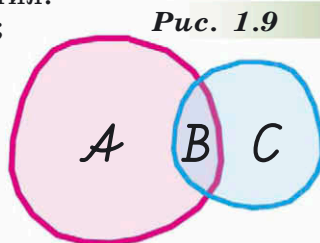
B : вынута дама пик;

C : вынута дама.

Дама пик — одна из карт пиковой масти, поэтому событие B влечёт за собой событие A , и оно, естественно, будет менее вероятно, чем A .

У события C четыре исхода: дама пик, дама крестей, дама червей и дама бубен. Один из них совпадает с событием B , а три других нет. Значит, событие B менее вероятное, чем любое из событий A и C (рис. 1.9).

А вот для сравнения событий A и C нужен уже подсчёт шансов.



Часто шансы оценивают на основе данных. Например, на основе наблюдений за атмосферными явлениями синоптики предсказывают вероятность выпадения осадков, в результате в прогнозе погоды мы слышим: «дождь маловероятен» или «вероятность осадков 5 %».

Примеры равновероятных событий:

- выпадение любого числа очков от 1 до 6 при бросании игрального кубика;
- выпадение орла или решки при бросании монеты;
- извлечение любой карты из перетасованной колоды карт.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Приведите по три примера достоверных и невозможных событий, а также тех случайных событий, о которых нельзя сказать, что они обязательно произойдут или никогда не произойдут.

● Подбрасывают игральный кубик.
 а) Приведите пример равновероятных событий.

б) Назовите все значения выпавших очков, при которых произойдёт событие «выпало не менее пяти очков».

в) Какое событие более вероятно:

A : выпало не менее пяти очков;

B : выпало более пяти очков?

● Изобразите отношение событий C и D из примера 1 с помощью кругов Эйлера.

УПРАЖНЕНИЯ

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

87

Какие из перечисленных событий достоверные, невозможные:

- А: вас пригласят сниматься в кино;
 В: день рождения одного из ваших знакомых — 30 февраля;
 С: вы выиграете, участвуя в лотерее;
 D: вы выиграете, участвуя в беспроигрышной лотерее;
 E: после четверга будет пятница?



88

Являются ли равновероятными следующие события:

- А: вылет самолёта по расписанию и задержка рейса;
 В: выпадение одного очка и выпадение шести очков при бросании кубика;
 С: вынимание из колоды карт туза и вынимание шестёрки;
 D: попадание и промах при стрельбе по мишени;
 E: выпадение снега и выпадение дождя 1 января в том регионе, где вы живёте?

89

Назовите событие, противоположное данному событию:

- А: вам никто не позвонит с 5 до 6 часов утра;
 В: из колоды карт вынута карта чёрной масти;
 С: при бросании игрального кубика выпало одно очко;
 D: при подбрасывании монеты выпал орёл;
 E: в партии телевизоров нет ни одного неисправного телевизора;
 F: по результатам забега спортсмен вышел в финал.

В каком из случаев событие и противоположное ему событие равновероятны?

90

Какие из перечисленных событий в обычных условиях маловероятны?

- А: звонок с урока не прозвенел;
 В: ежедневная газета не вышла;
 С: круглосуточный магазин открыт;
 D: рейсовый автобус не пришёл.

91

Перед футбольным матчем «Спартак» — «Динамо» обсуждаются шансы событий:

- А: будет ничья;
 В: не будет забито ни одного мяча;
 С: «Спартак» не выиграет;
 D: «Спартак» выиграет.



Изобразите с помощью кругов Эйлера, как эти события соотносятся друг с другом. *Подсказка.* Начните с противоположных событий.

92

В коробке 3 красных, 3 белых и 3 чёрных шара, одинаковых на ощупь. Из коробки вынимают наугад n шаров. Рассмотрим событие А: среди вынутых шаров окажутся шары всех трёх цветов. При каких значениях n событие А невозможно, а при каких — достоверное?

Неверно!

Чтобы открыть первый кодовый замок, надо нажать три цифры из 10, а чтобы открыть второй замок — 7 цифр из 10. Порядок цифр не учитывается. Докажите, что утверждение «угадать код второго замка труднее» неверно.

ОЦЕНИВАЕМ И СРАВНИВАЕМ ШАНСЫ СОБЫТИЙ

93

Тренер по стрельбе говорит о трёх своих лучших спортсменах: «Орлов выбивает 99 очков из 100, Соколов — 49 из 50, Ястребов — 24 из 25». У кого из них больше шансов попасть в десятку, а у кого меньше?

94

Из колоды в 36 карт наугад вытягивают одну карту.

а) Назовите все случаи, при которых произойдёт событие, и оцените его шансы:

A: вынута карта — туз;

B: вынута карта красной масти;

C: вынута карта бубновой масти.

б) Приведите пример равновероятных событий.

95

В пяти коробках лежат чёрные и белые шары, одинаковые на ощупь (рис. 1.10). Из каждой коробки не глядя вынимают один шар. Перечислите коробки в порядке возрастания шансов вынуть чёрный шар.

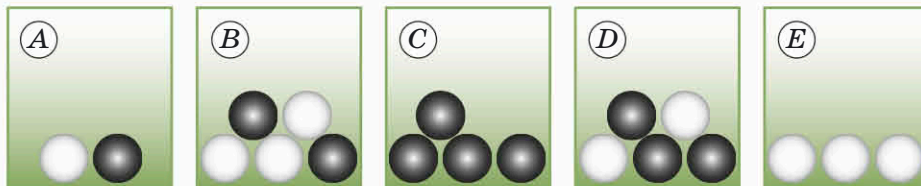


Рис. 1.10

96

Бросают игральный кубик. Сравните шансы наступления событий:

A: выпадет три очка;

C: выпадет больше трёх очков;

B: выпадет не три очка;

D: выпадет меньше трёх очков.

97

Вашему классу предстоит выполнять тест по математике. Исходя из своего опыта оцените шансы следующих событий:

A: я не сделаю ни одной ошибки;

B: я сделаю хотя бы одну ошибку;

C: я получу двойку;

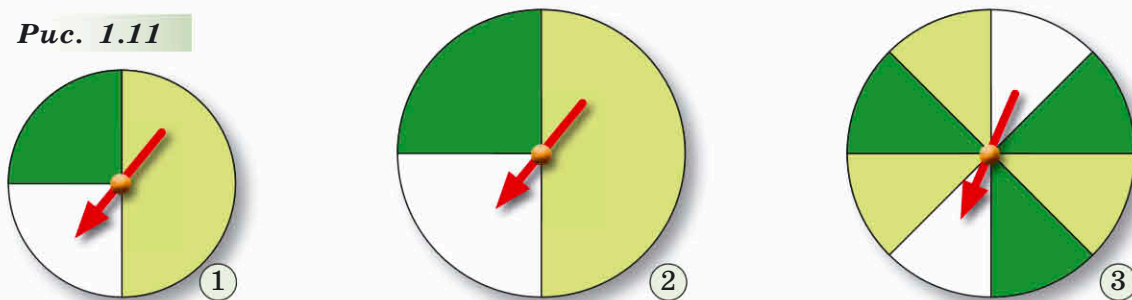
D: никто в классе не получит пятёрку.

Дополните утверждение: «Событие ... более вероятно, чем событие ...».

98

Вы выигрываете, если стрелка останавливается на белом поле. Какая из вертушек, изображённых на рисунке 1.11, даёт вам больше шансов на выигрыш?

Рис. 1.11



99

Сравните шансы событий:

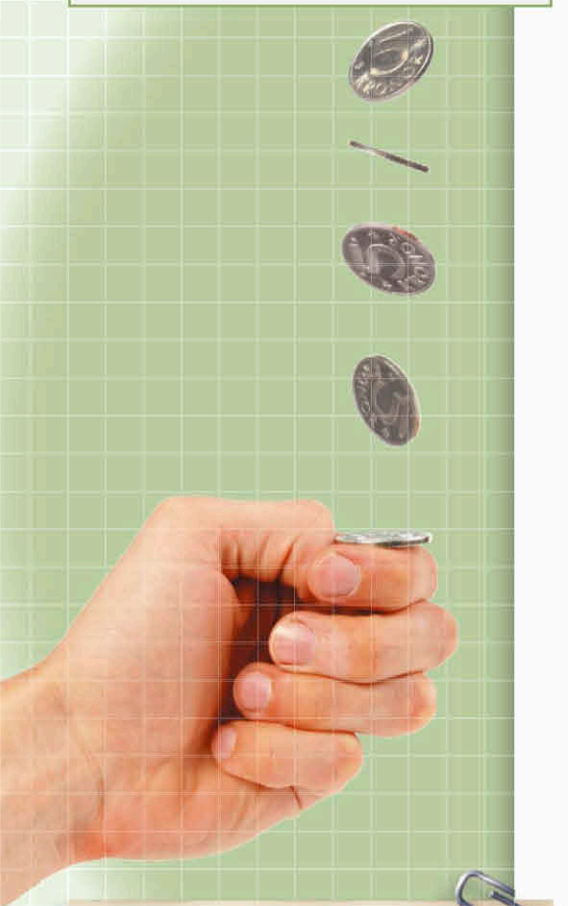
A: в лотерее «Спортлото» 6 из 49 угадать ровно 3 номера;

B: в лотерее «Спортлото» 6 из 49 угадать хотя бы 3 номера.

1.7

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Что называют частотой случайного события.



Частота соответствующих событий позволяет строить обоснованные прогнозы для решения задач, возникающих в жизни.



ЧАСТОТА СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Оценку шансов наступления случайного события можно осуществить с помощью регулярных наблюдений или специальных экспериментов.

СЛУЧАЙНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ Результат подбрасывания монеты или игрального кубика заранее предсказать нельзя, в каждом таком эксперименте результат зависит от случая, поэтому их называют *случайными опытами* или *случайными экспериментами*. Важно, что такие случайные эксперименты можно повторять многократно в одних и тех же условиях.

К случайным относят не только эксперименты, которые мы проводим сами, но и самые разные опыты, испытания, наблюдения, измерения, проведённые кем-то другим, даже наблюдения за явлениями природы. Главное, что их результаты зависят от случая, но эксперименты происходят каждый раз примерно в одних и тех же условиях. Надо лишь зафиксировать эти результаты.

Например, результатом случайного эксперимента можно считать температуру воздуха в один и тот же день в одном и том же месте, итоги еженедельной лотереи, результаты стрельбы по мишени, уровень весеннего разлива реки. И хотя результат каждого отдельного испытания зависит от случая, при проведении большого числа таких испытаний выявляются отчётливые закономерности.

ЧАСТОТА СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ Обычно многократные случайные эксперименты проводят, чтобы определить, как часто появляется интересующий результат.

Например, как часто при подбрасывании монеты выпадает орёл или при одновременном подбрасывании двух кубиков выпадает двенадцать очков. Для этого по результатам серии экспериментов вычисляется частота наблюдаемого события.



Частотой случайного события в серии экспериментов называют отношение числа экспериментов, в которых это событие произошло, к общему числу экспериментов.

Частота показывает, какую часть от общего числа проведённых случайных экспериментов составляют эксперименты, завершившиеся интересующим результатом. Например, в серии из N экспериментов интересующее нас событие произошло n раз, тогда его частота равна $\frac{n}{N}$.



Поскольку $0 \leq n \leq N$, то частота выражается числом от 0 до 1. Если событие не произошло ни разу, т.е. $n = 0$, то его частота в серии экспериментов равна 0. Если оно происходило каждый раз, то его частота равна 1. Частоту принято выражать также и в процентах.

ЭКСПЕРИМЕНТ С КНОПКОЙ

Когда перед началом игры игроки хотят договориться, кто из них сделает первый ход, то обычно подбрасывают монету. Так поступают потому, что выпадение орла или решки считается равновероятным, а значит, игроки имеют равные шансы. А если заменить монету кнопкой, останутся ли шансы сторон равными? Кнопка может упасть остриём вверх или остриём вниз. Равны ли шансы этих событий? Чтобы ответить на вопрос, надо много раз подбросить кнопку и подсчитать частоту каждого события. Если окажется, что их частоты будут примерно равными, то это означает, что эти события практически равновероятны и замена монеты на кнопку при определении, кому начинать игру, справедлива. Если же частоты будут заметно различаться, то эти события равновероятными считать нельзя.

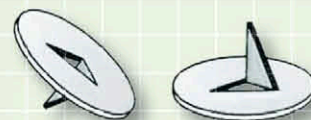
Пример. В классе проводился эксперимент по подбрасыванию кнопки. Ученики разбились на пары, всего 10 пар, каждая из которых 100 раз подбросила кнопку.

Поскольку все кнопки из одной коробки можно считать одинаковыми, ученики свели результаты в общую таблицу. В первый столбец таблицы они внесли результаты экспериментов, проведённых одной парой учеников. Частота падения кнопки остриём вниз в этой серии экспериментов равна 0,44, а частота падения кнопки остриём вверх равна 0,56. Заполняя следующий столбец, к результатам предыдущего столбца прибавляли результаты, полученные следующей парой учеников, и подсчитывали соответствующие частоты.

Число экспериментов		100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
Остриё вниз	Всего событий	44	94	130	173	221	265	310	356	403	448
	Частота	0,44	0,47	0,43	0,43	0,44	0,44	0,44	0,45	0,45	0,45
Остриё вверх	Всего событий	56	106	170	227	279	335	390	444	497	552
	Частота	0,56	0,53	0,57	0,57	0,56	0,56	0,56	0,55	0,55	0,55

Из таблицы видно, что при увеличении числа экспериментов частота каждого события выравнивается, или, как говорят, *стабилизируется*. Частота события «остриё вниз» стабилизируется около числа 0,45, а частота события «остриё вверх» — около числа 0,55. Значит, шансы падения кнопки остриём вниз несколько меньше, чем остриём вверх.

Остриё вниз Остриё вверх



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют частотой случайного события?
- Назовите два свойства случайного эксперимента.
- Монету подбросили 1000 раз, при этом 495 раз выпал орёл. Чему равна в этой серии экспериментов частота события «выпал орёл»? события «выпала решка»?
- Ответьте на вопросы по таблице:
 - а) Чему равна частота события «остриё вниз» после 300 испытаний? события «остриё вверх» после 500 испытаний?
 - б) После какого числа испытаний частота события «остриё вниз» стала равна 0,45?
 - в) Сколько раз кнопка упала остриём вверх у 6-й пары?
- Приведите пример природного явления, которое можно считать экспериментом со случайными исходами.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧАСТОТА СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

100

Указание. При вычислении частоты используйте калькулятор.

- а) За лето на Черноморском побережье было 67 солнечных дней. Какова частота солнечных дней на побережье за лето? пасмурных дней?
- б) В марте в городе родилось 2348 мальчиков и 2027 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков и частоту рождения девочек.

101

В таблице представлена информация о количестве дней с осадками в Москве в каждом месяце 2012 г. Какова частота осадков в январе? за весну? Какова частота дней без осадков в феврале?

Месяц	Янв.	Фев.	Март	Апр.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Сен.	Окт.	Ноя.	Дек.
Количество дней	19	19	16	15	10	10	4	12	10	18	15	15

102

Подсчитано, что частота получения неудовлетворительной отметки на школьном экзамене в городе N примерно равна 0,07. Известно, что в этом городе 100 человек не сдали экзамен. Найдите примерное число школьников, сдававших экзамен, и примерное число школьников, сдавших экзамен успешно.

103

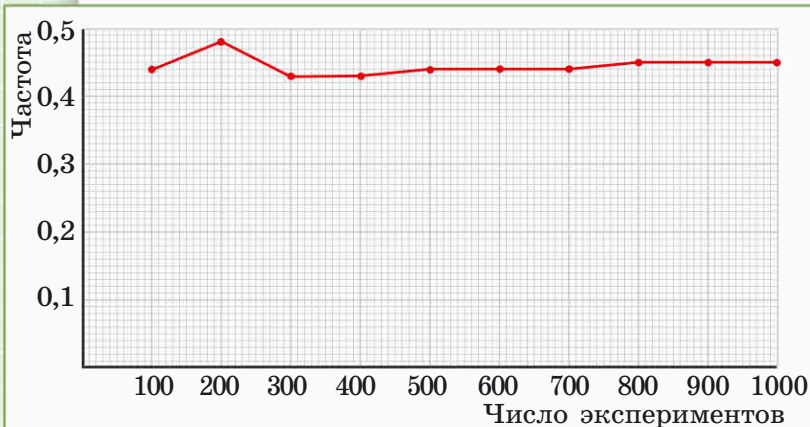
Проверка показала, что всхожесть семян огурцов определённого сорта составляет 90 %. Посеяли 200 семян. Какое число проросших семян следует ожидать?

104

Подсчитано, что частота появления «зайца» в электропоездах составляет 10 %. За день 5400 пассажиров купили билеты. Сколько примерно «зайцев» ехало в электропоездах в этот день?

105

На рисунке 1.12 представлена графически частота события «кнопка упала остриём вниз» из примера на с. 35.



Каждая пара чисел (число экспериментов — частота) отмечена точкой на координатной плоскости. Полученные точки соединены ломаной, которая при увеличении числа экспериментов становится практически горизонтальной.

Представьте графически частоту события «кнопка упала остриём вверх».

Рис. 1.12

ПРОВОДИМ СЛУЧАЙНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

106

Разделитесь на пары и проведите в классе эксперимент с кнопкой, описанный в пункте 1.7. Организуйте работу следующим образом:

- Каждая пара должна подбросить кнопку 200 раз. Один из участников будет подбрасывать кнопку, другой — фиксировать результаты в таблице.

- Сведите все результаты в общую таблицу.
- Найдите частоту каждого исхода.
- Сопоставьте свой результат с результатом в тексте.

107

Проведите 150 экспериментов по подбрасыванию металлической крышки от бутылки. Каждый из экспериментов может завершиться одним из двух вариантов: крышка упадёт вверх дном или вверх зубцами. Результаты оформите в виде таблицы.

Событие	Подсчёты	Всего
A: 		
B: 		
Итого:		150

- 1) Подсчитайте частоту события A и частоту события B.
- 2) Пусть двое играют, подбрасывая такую крышку. Один выигрывает при появлении события A, а другой — при появлении события B. Используя полученные статистические данные, определите, справедлива ли эта игра. Что нужно сделать, чтобы ваш вывод был более обоснованным?

108

Проведите 50 экспериментов по подбрасыванию игрального кубика. Каждый из этих экспериментов может завершиться одним из шести возможных вариантов: выпадет 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Полученные результаты оформите в виде таблицы. Сведите все результаты, полученные в классе, в общую таблицу.

- 1) Вычислите частоту каждого значения выпавших очков.
- 2) Справедливо ли использование игрального кубика в настольных играх?
- 3) Какое событие более вероятно: «выпадет одно очко» или «выпадет не одно очко»?

109

Изготовьте «неправильный» игральный кубик из листа плотной бумаги. Для этого надо вырезать развёртку куба (например, такую, как на рисунке 1.13), написать на гранях цифры и склеить кубик, предварительно прикрепив с внутренней стороны грани с цифрой 1 кусочек пластилина. Подбросьте кубик 1000 раз. Сколько раз при этом выпадет одно очко? Сравните этот результат с результатом из № 108 (2).

Замечание. В экспериментах с «неправильными» кубиками нельзя объединять результаты, полученные разными группами, поскольку такие кубики нельзя считать одинаковыми.

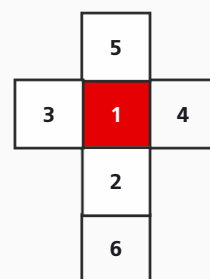


Рис. 1.13

110

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Готовясь к участию в телеигре «Поле чудес», где по буквам отгадываются слова, Олег задумался: «Какую букву стоит назвать первой, когда в слове ещё не угадано ни одной буквы?» Понятно, что надо начать с самой распространённой в русском языке буквы. Но как её определить? Чтобы помочь Олегу, 33 его одноклассника распределили между собой все буквы алфавита, взяли один и тот же текст и каждый посчитал, сколько раз в нём встречается его буква. Так они экспериментально определили самую распространённую букву русского алфавита. Как вы думаете, что это за буква? Чтобы проверить свою догадку, проведите в классе такой же эксперимент.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ПОСЛЕДНЯЯ ЦИФРА СТЕПЕНИ

Проведём небольшое исследование: выясним, есть ли какая-нибудь закономерность в том, как меняется последняя цифра числа 2^n , где n — натуральное число, с изменением показателя n . Для этого рассмотрим таблицу.

$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$
$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$
$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$	$2^{11} = 2048$	$2^{12} = 4096$
$2^{13} = 8192$	$2^{14} = 16\,384$	$2^{15} = 32\,768$	$2^{16} = 65\,536$

Вы заметили, что через каждые четыре шага последняя цифра повторяется? Теперь нетрудно определить последнюю цифру степени 2^n для любого показателя n .

Возьмём число 2^{100} . Если бы мы продолжили таблицу, то оно попало бы в столбец, где находятся степени 2^4 , 2^8 , 2^{12} , показатели которых кратны четырём. Значит, число 2^{100} , как и эти степени, оканчивается цифрой 6.

Вообще все натуральные числа могут быть отнесены к одной из четырёх групп: числа, делящиеся на 4; числа, дающие при делении на 4 остаток, равный 1; остаток, равный 2, или остаток, равный 3. И последняя цифра числа 2^n определяется тем, в какую из этих групп попадает показатель n . Показатели в первом столбце при делении на 4 дают в остатке 1, во втором — 2, в третьем — 3, в четвёртом — 0. Поэтому, например:

число 2^{200} оканчивается цифрой 6, так как 200 делится на 4;

число 2^{201} оканчивается цифрой 2, так как 201 при делении на 4 даёт остаток 1, $201 = 4 \cdot 50 + 1$;

число 2^{202} оканчивается цифрой 4, так как 202 при делении на 4 даёт остаток 2, $202 = 4 \cdot 50 + 2$;

число 2^{203} оканчивается цифрой 8, так как 203 при делении на 4 даёт остаток 3, $203 = 4 \cdot 50 + 3$.

1. Какими цифрами могут оканчиваться числа, получающиеся при возведении в степень числа 3? Какой цифрой оканчивается число: 3^{10} ; 3^{15} ; 3^{20} ; 3^{126} ?
2. Какими цифрами могут оканчиваться степени числа 7? Какой цифрой оканчивается число: 7^{40} ; 7^{61} ; 7^{30} ; 7^{23} ?
3. Какое из чисел 2^{100} ; 2^{101} ; 2^{102} ; 2^{103} оканчивается той же цифрой, что и число 2^{10} ?
4. Докажите, что числа 3^{33} , 3^{333} и 3^{3333} оканчиваются одной и той же цифрой. Укажите ещё какую-нибудь степень числа 3, оканчивающуюся той же цифрой.
5. Назовите какое-нибудь число, отличное от 0 и 1, любая степень которого оканчивается одной и той же цифрой. Приведите ещё примеры таких чисел.
6. Сформулируйте условие, при котором числа 4^m и 4^n , где $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, оканчиваются одной и той же цифрой.
7. Делится ли на 10:
сумма $11^{14} + 3^{22}$; разность $7^{20} - 9^{10}$; произведение $12^{15} \cdot 15^{12}$?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Степень с натуральным показателем

Если n — натуральное число и $n > 1$, то

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

n множителей

Если $n = 1$, то $a^1 = a$.

Степень с отрицательным основанием положительна, если показатель степени — число чётное, и отрицательна, если показатель степени — число нечётное.

Запись 10^{-24} означает $\frac{1}{10^{24}}$.

$$4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 1024$$

$$4^1 = 4$$

$$(-3)^4 > 0;$$

$$(-3)^3 < 0.$$

$$7 \cdot 10^{-11} = \frac{7}{10^{11}}$$

- 1 Вычислите: а) $-5 \cdot 3^3$; б) $0,01 \cdot (-3)^4$; в) $1 - 5 \cdot 0,4^2$; г) $10 \cdot (0,7 - 1,2)^3$.
- 2 а) Запишите в виде натурального числа и назовите его: 10^3 ; 10^6 ; 10^9 .
б) Запишите в виде десятичной дроби: 10^{-3} ; 10^{-6} ; 10^{-9} .
- 3 Запишите выражение:
а) сумма квадратов чисел 5 и 8; б) квадрат разности чисел 15 и 7.
- 4 Дополните равенство, используя степени числа 10:
а) 5 км = ... м; б) 2 м = ... см; в) 2 см = ... м; г) 3 м = ... км.
- 5 Расстояние от Земли до Луны примерно равно $3,844 \cdot 10^5$ км. Запишите значение этой величины в виде натурального числа.

Процент — это $\frac{1}{100}$ часть величины.

1 % — это $\frac{1}{100}$, или 0,01.

12,5 % — это 0,125

0,4 % — это 0,004

120 % — это 1,2

Примеры основных задач на проценты

1. Найти 15 % от 300 рублей.

15 % — это 0,15

$$300 \cdot 0,15 = 45 \text{ (р.)}$$

2. Найти величину, 12 % которой составляют 60 р.

12 % — это 0,12

$$60 : 0,12 = 500 \text{ (р.)}$$

3. Узнать, сколько процентов составляют 40 р. от 200 р.

$$\frac{40}{200} = 0,2 \text{ — это } 20 \%$$

- 6 Выразите в процентах десятичные дроби: 0,15; 0,7; 0,065; 0,007; 1,34.
- 7 Выразите десятичной дробью: 42 %; 30 %; 8,3 %; 0,7 %; 140 %.
- 8 а) Цена товара 1200 р. Сколько заплатит покупатель за этот товар, если он продаётся со скидкой 3,5 %?
б) На первый курс училища может быть зачислено 60 учащихся. Поданные заявления составили 160 % от этого числа. Сколько подано заявлений?
- 9 Стоимость установки стиральной машины составляет 5 % от её цены. Сколько стоит стиральная машина, если за её установку заплатили 400 р.?

- 10 В прошлом году в школе училось 500 учащихся, а в этом году их стало 550. На сколько процентов увеличилось число учащихся школы?

Средним арифметическим ряда чисел называется частное от деления суммы этих чисел на их количество.

Модой называют число ряда, которое встречается в этом ряду наиболее часто.

Размах — это разность между наибольшим и наименьшим значениями ряда данных.

Дан ряд чисел:

5, 4, 4, 3, 3, 5, 4, 4, 4, 4.

Среднее арифметическое:

$$\frac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2}{10} = \frac{40}{10} = 4.$$

Мода: 4.

Размах: $5 - 3 = 2$.

- 11 Телефонные звонки поступали в справочную службу со следующими интервалами: 26 с, 34 с, 28 с, 30 с, 29 с, 28 с, 24 с, 29 с, 40 с, 32 с. Найдите среднее арифметическое и размах интервалов между звонками.

- 12 В магазине женской одежды в течение дня производился учёт размеров купленной одежды: 44, 52, 46, 48, 50, 50, 52, 44, 44, 46, 46, 50, 48, 46, 48, 50, 48, 48, 48, 46, 46, 48, 44. Чему равна мода этого ряда?

Событие, которое в одних и тех же условиях может произойти, а может и не произойти, называют *случайным*. Событие, которое в определённых условиях происходит всегда, называют *достоверным*, а событие, которое никогда не происходит, — *невозможным*.



«Солнце взойдёт на востоке» — достоверное событие.
«Солнце взойдёт на западе» — невозможное событие.

Случайные события, имеющие равные шансы, называют *равновозможными* или *равновероятными*.

Частота случайного события — это отношение числа экспериментов, в которых событие произошло, к общему числу экспериментов.

Бросают игральный кубик. Шанс события A : «выпадет одно очко» — равен $\frac{1}{6}$. Шанс события B : «выпадет больше одного очка» — равен $\frac{5}{6}$. Событие B вероятнее события A .

Бросают монету; события «выпадет орёл» и «выпадет решка» равновероятны.

Монету бросили 100 раз, в 46 случаях выпал орёл. Частота события «выпал орёл» в этом эксперименте равна $\frac{46}{100} = 0,46$.

- 13 Бросают игральный кубик. Сравните шансы наступления случайных событий:
 A : «выпадет два очка»; C : «выпадет больше двух очков»;
 B : «выпадет не два очка»; D : «выпадет меньше двух очков».

- 14 Баскетболист на тренировке выполнил 50 бросков в кольцо и попал 36 раз. Какова частота попаданий в кольцо на тренировке?

2

ГЛАВА

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬ- НОСТЬ

- РЕАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ФОРМУЛЫ
- ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ
- ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ
- ПРОПОРЦИИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОПОРЦИЙ
- ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

Узнайте больше

- ЗАДАЧИ НА «СЛОЖНЫЕ» ПРОПОРЦИИ

ИНТЕРЕСНО

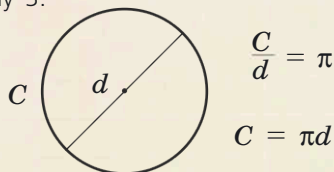
Почему в природе не бывает слонов в три раза выше и шире тех, что есть? Такой необычный вопрос ставит Галилео Галилей в трактате «Беседы и математические доказательства». Ответ опирался на зависимости, известные учёным: масса увеличивается как куб размера, а прочность костей — как квадрат. Значит, если бы размеры слона увеличились втрое, масса его увеличилась бы в 27 раз, а прочность костей — только в 9 раз. Такой слон был бы просто раздавлен своей тяжестью, потому что прочности костей уже не хватило бы, чтоб выдержать столь непомерно увеличившуюся массу.

2.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что многие зависимости между величинами можно описать с помощью формул.
- Как с помощью формулы находить значение одной величины, зная значения других.

Ещё в Древнем мире было известно, что отношение длины любой окружности к её диаметру равно одному и тому же числу, немного превосходящему 3.



Это число (π) не принадлежит к рациональным числам. Его нельзя представить ни обыкновенной дробью, ни десятичной. Число знаков после запятой в нём бесконечно и не подчиняется никакой закономерности. На протяжении всей истории развития математики учёные вычисляли правильные десятичные знаки этого числа, иногда посвящая нахождению нужных цифр десятилетия. Сегодня, в век компьютеров, найдено уже более 10 триллионов знаков после запятой, и это количество ежедневно увеличивается.

$$\pi = 3,14159265\dots$$



Памятник числу π .
Сиэтл, Музей искусств

РЕАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ФОРМУЛЫ

Мы живём в мире процессов и явлений, представляющих собой разнообразные зависимости между величинами: изменение одной величины влечёт за собой изменение другой или других. Например, мы поднимаемся в горы, и с увеличением высоты снижается атмосферное давление. Земля вращается вокруг Солнца, и от этого происходит смена времён года. Это кажется настолько естественным, что проявляется даже в народном творчестве — пословицах и поговорках: «Тише едешь — дальше будешь», «Много снега — много хлеба, много воды — много травы». Вы сами можете привести подобные примеры.

ОПИСАНИЕ ЗАВИСИМОСТЕЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ Занимаясь математикой, вы узнали много формул, описывающих зависимости между величинами, и научились с их помощью вычислять значения одних по значениям других.

Пример 1. Формула площади прямоугольника $S = ab$ выражает соотношение между площадью S и длинами сторон a и b . Практический смысл этой формулы в том, что для нахождения площади прямоугольника достаточно измерить его стороны и перемножить получившиеся числа.

Пример 2. Формула пути равномерного движения $s = vt$ выражает зависимость расстояния s от скорости движения v и времени движения t . Это главное соотношение между расстоянием, скоростью и временем движения позволяет по любым двум из указанных величин найти третью с помощью вычислений.

Пример 3. Вы, конечно, слышали выражения *производительность работы, производительность машины, устройства*. Каменщик выкладывает стену из кирпичей, принтер распечатывает документ, насос подаёт воду в резервуар. Во всех этих случаях выполняется некоторая работа, и объём проделанной работы зависит от скорости её выполнения — от того, сколько кирпичей каменщик выкладывает, например, за час, сколько страниц принтер распечатывает в минуту, сколько литров воды накачивает за минуту насос. Эту величину, показывающую, какой объём работы выполняется в единицу времени, и называют производительностью.

Для вычисления объёма произведённой работы надо производительность умножить на время её выполнения. Обозначим объём всей работы (число уложен-

ных кирпичей, распечатанных страниц, литров накачанной воды) буквой P , производительность — буквой p , а время работы — буквой t . Получим формулу, связывающую эти величины: $P = pt$.

ПЕРЕМЕННЫЕ И КОНСТАНТЫ При вычислениях вместо букв в формулу можно подставлять разные числа. Например, в формуле $s = vt$ время и скорость могут меняться, и в зависимости от этого будет меняться расстояние. Такие изменяющиеся величины называют *переменными величинами*, а буквы, которыми они обозначены, — *переменными*.

Но буквой в формуле не всегда обозначена переменная. Например, в известной вам формуле длины окружности $C = \pi d$ буквой π обозначено число, равное отношению длины окружности C к длине её диаметра d и являющееся одним и тем же для любой окружности. Говорят, что π — это *постоянная*, или *константа* (от лат. слова *constantis*, означающего «постоянная»). А в ещё незнакомой вам знаменитой формуле Альберта Эйнштейна $E = mc^2$ буквой c обозначена константа, равная скорости света (наиболее точное её значение на сегодняшний день — 299 792 458 м/с).



Каждая переменная в формуле связана с множеством значений, которые она может принимать. Так, в формуле $s = vt$ переменные могут принимать только положительные значения. Более того, эти значения находятся в ограниченном промежутке. Например, если этой формулой описывается скорость пешехода, то значения скорости v не могут превышать 5–6 км/ч.

ВЫЧИСЛЕНИЯ ПО ФОРМУЛАМ Для того чтобы вычислить какую-либо величину по формуле, надо подставить значения известных величин вместо букв, их обозначающих. При этом необходимо соблюдать важное правило: надо следить за тем, чтобы единицы, в которых выражены входящие в формулу величины, были согласованы между собой.

Так, если поезд движется со скоростью 108 км/ч, то за 10 с он пройдёт не $108 \cdot 10 = 1080$ км, а 0,3 км. Действительно, чтобы получить правильный результат, надо время выразить в часах:

$$10 \text{ с} = \frac{1}{360} \text{ ч},$$

$$s = 108 \text{ км/ч} \cdot \frac{1}{360} \text{ ч} = \frac{108}{360} \cdot \frac{\text{км} \cdot \text{ч}}{\text{ч}} = 0,3 \text{ км}.$$

Обратите внимание: в ходе вычислений мы обращались с наименованиями так же, как и с дробями.

Приближённые значения константы c (скорости света):

299 800 000 м/с;

300 000 км/с;

1,08 млрд км/ч.



Солнечному свету требуется около 8 мин 19 с, чтобы достигнуть Земли.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Запишите формулу длины окружности. Какие величины в этой формуле являются переменными и какая — постоянной?

● Запишите формулу зависимости стоимости a одинаковых учебников, покупаемых для класса, от цены учебника и числа учебников. Какие значения могут принимать переменные в этой формуле? Вычислите по этой формуле стоимость 30 одинаковых учебников, если цена одного учебника 250 р.

УПРАЖНЕНИЯ

ОПИСЫВАЕМ ЗАВИСИМОСТИ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ

111

Междугородний автобус следует из Москвы в Псков со средней скоростью 60 км/ч.

а) Составьте формулу для вычисления расстояния s , пройденного автобусом за t часов.

б) Составьте формулу для вычисления расстояния s , которое автобусу остаётся пройти до Пскова через t часов после начала движения. (Расстояние между Москвой и Псковом по шоссе равно 735 км.)

112

а) Игорь учится набирать текст на компьютере. Составьте формулу, по которой можно вычислить, сколько ударов в минуту (a) делает Игорь, если за 10 мин он делает n ударов. Какие значения могут принимать переменные a и n ?

б) Игорь и Сергей учатся набирать текст на компьютере. Составьте формулу зависимости числа знаков, набранных ими вместе за 10 минут (a), от скорости работы каждого. Скорость Игоря — m знаков в минуту, Сергея — n знаков в минуту. Какие значения могут принимать переменные a , m и n ?

113

а) Воду в бассейн накачивают насосом. Его производительность 25 л/мин. Составьте формулу для вычисления времени t , которое потребуется для того, чтобы накачать в бассейн V литров воды. Какие значения могут принимать переменные V и t , если бассейн вмещает не более 6000 л воды?

б) Воду в бассейн накачивают два насоса. Первый подаёт a л воды в минуту, второй — b л в минуту. Составьте формулу для вычисления количества воды V (л) в бассейне через t минут после одновременного включения насосов. Какие значения могут принимать переменные, входящие в эту формулу?

114

а) В России каждый работающий человек платит подоходный налог, составляющий 13 % его заработка. Введите переменные и составьте формулу зависимости размера подоходного налога от величины заработка.

б) Сотрудники некоторого предприятия отчисляют в Пенсионный фонд 4 % от заработной платы. Введите переменные и составьте формулу зависимости размера пенсионных отчислений от величины заработной платы.

ВЫЧИСЛЯЕМ ПО ФОРМУЛАМ

115

а) Объём треугольной пирамиды, все рёбра которой равны (рис. 2.1), можно приближённо вычислить по формуле $V = \frac{7a^3}{60}$, где a — длина ребра. Найдите объём тетраэдра при $a = 6$ см; при $a = 12$ см.

б) Объём куба (рис. 2.2) вычисляется по формуле $V = a^3$, а площадь его поверхности — по формуле $S = 6a^2$, где a — длина ребра куба. Найдите объём куба и площадь его поверхности при $a = 5$ см; при $a = 15$ см.

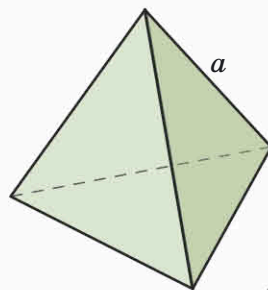


Рис. 2.1

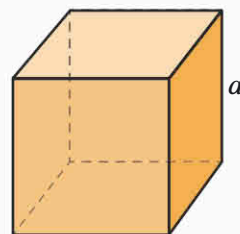
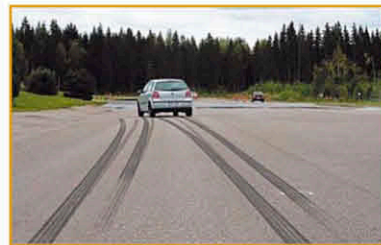


Рис. 2.2

116

Тормозной путь автомобиля — это расстояние, которое он проезжает до полной остановки после того, как водитель нажал на тормоз. Если легковой автомобиль едет по сухой дороге со скоростью v км/ч, то его тормозной путь в метрах можно приближённо вычислить по формуле $S = \frac{5v^2}{1016}$.



а) Вычислите тормозной путь легкового автомобиля, который едет по сухой дороге со скоростью 80 км/ч; 100 км/ч (воспользуйтесь калькулятором, ответ округлите до целых).

б) Определите, на сколько метров и во сколько раз больше тормозной путь автомобиля при скорости 100 км/ч, чем при скорости 80 км/ч.

117

Во время грозы вы можете вычислить, на каком расстоянии s от вас находится её эпицентр. Для этого нужно сосчитать, сколько секунд t прошло между вспышкой молнии и раскатом грома, и умножить полученное число на скорость звука в воздухе $v_{зв.}$.

1) Запишите нужную формулу. Назовите переменные величины в этой формуле и постоянную (константу).

2) Известно, что $v_{зв.} = 330$ м/с. Определите, на каком расстоянии от вас находится эпицентр грозы, и выразите его в километрах, если $t = 6$ с; $t = 13$ с; $t = 21$ с. Ответ округлите до целых.

118

Размер обуви зависит от длины стопы. Существуют формулы, выражающие эту зависимость для мужских и женских размеров, принятых в некоторых англоговорящих странах: для мужской обуви $s = 3l - 26$, для женской обуви $s = 3l - 22$, где l — длина стопы в дюймах. Какой английский размер подходит Тамаре, если длина стопы у неё равна 36 см, и Роману, если у него длина стопы 39 см? (1 дюйм $\approx 2,5$ см.)

119

Выразите высоту h и сторону a из формулы:

а) площади параллелограмма $S = ah$ (рис. 2.3);

б) площади треугольника $S = 0,5 ah$ (рис. 2.4).

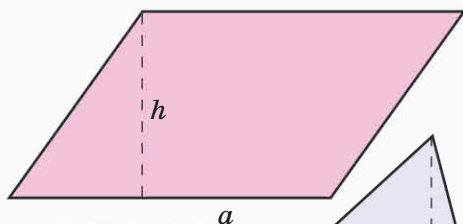


Рис. 2.3

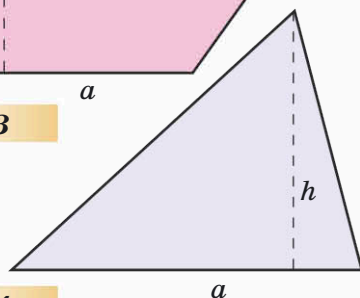


Рис. 2.4

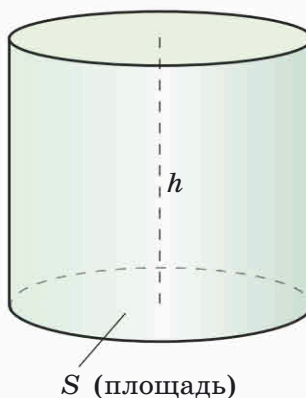


Рис. 2.5

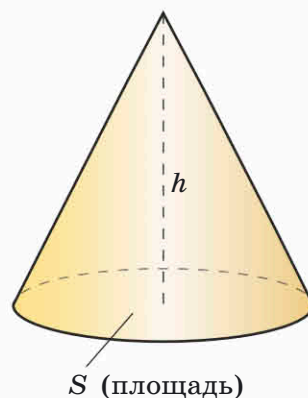


Рис. 2.6

120

Выразите высоту h и площадь основания S из формулы:

а) объёма цилиндра $V = Sh$ (рис. 2.5); б) объёма конуса $V = \frac{1}{3}Sh$ (рис. 2.6).

2.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие величины называют прямо пропорциональными.
- Как определить, является ли зависимость прямой пропорциональностью.
- Как рассуждать при решении задач, в которых рассматриваются пропорциональные зависимости.

Табл. 1: $s = vt$, $v = 60$ км/ч

t , ч	1	2	3	4	5	6
s , км	60	120	180	240	300	360

Вместо слов «прямо пропорциональные величины» часто говорят короче — «пропорциональные величины».

Табл. 2: $s = vt$, $t = 6$ ч

v , км/ч	10	20	30	40	50	60
s , км	60	120	180	240	300	360

ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

В предыдущем пункте вы рассмотрели формулы площади прямоугольника $S = ab$, пути $s = vt$, работы $P = pt$. Хотя эти формулы связывают разные величины и записываются разными буквами, они очень похожи: одна величина равна произведению двух других. Все они описывают зависимости, наиболее часто встречающиеся в окружающем нас мире, — прямую пропорциональность и обратную пропорциональность. Вы ещё не раз встретитесь с примерами этих зависимостей и в реальной жизни, и на страницах школьных учебников. Сейчас вы начинаете изучать их математические свойства и, наверное, удивитесь, когда увидите, что на самом деле некоторые из них вам знакомы из вашего жизненного опыта.

ЧТО ТАКОЕ ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ Рассмотрим формулу пути $s = vt$. Если скорость движения постоянна, например, автомобиль едет со скоростью 60 км/ч, то пройденный им путь s зависит только от времени движения. Эта зависимость показана в таблице 1, приведённой на полях.

Во сколько раз увеличивается время движения t , во столько же раз увеличивается и пройденный путь.



Две величины называют прямо пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Говорят, что при постоянной скорости движения *расстояние прямо пропорционально времени движения*.

Пусть теперь постоянным является время. В этом случае расстояние зависит от скорости движения. Эта зависимость при $t = 6$ ч показана в таблице 2: во сколько раз увеличивается скорость, во столько раз больше будет пройденный путь. Поэтому справедливо также, что при постоянном времени *расстояние пропорционально скорости движения*.

Формулы площади прямоугольника $S = ab$, стоимости $C = ct$, работы $P = pt$, рассмотренные в пункте 2.1, похожи на формулу $s = vt$, что позволяет сделать следующий вывод:

- площадь прямоугольника пропорциональна каждой из его сторон;
- стоимость товара пропорциональна цене и количеству этого товара;
- выполненная работа пропорциональна производительности и времени её выполнения.

Любая формула, похожая на формулу $s = vt$, даёт нам два случая прямо пропорциональных величин. Все такие формулы могут быть представлены в виде $y = kx$, где буквами x и y обозначают переменные величины, а буквой k — ту величину, которую мы считаем постоянной.

Формулу $y = kx$ называют *формулой прямой пропорциональности*, а число k — *коэффициентом пропорциональности*.

СВОЙСТВО ПРЯМОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ Обратимся снова к данным таблицы 1 и для каждой пары соответственных значений найдём отношение s к t (таблица 3).

Вы видите, что оно равно одному и тому же числу 60 — значению скорости движения. В этом проявляется важное свойство прямой пропорциональности:

Если две величины прямо пропорциональны, то отношение их соответственных значений равно одному и тому же числу — коэффициенту пропорциональности.

Это свойство часто используют для того, чтобы выяснить, является ли зависимость прямой пропорциональностью. Его можно доказать для общего случая прямо пропорциональной зависимости. Действительно, если из формулы $y = kx$ выразить k , то формула примет вид $\frac{y}{x} = k$, что и является буквенной записью сформулированного свойства.



Не любая зависимость, в которой увеличение (уменьшение) одной величины влечёт за собой увеличение (уменьшение) другой, является прямой пропорциональностью. Например, длина окружности C прямо пропорциональна длине её радиуса r : $C = 2\pi r$. Коэффициент пропорциональности равен в этом случае 2π . Площадь круга S также зависит от длины его радиуса r : $S = \pi r^2$. Но эта зависимость не является прямой пропорциональностью. Убедиться в этом вам помогут приведённые ниже таблицы (вычисления выполнены для $\pi \approx 3$).

r , см	1	2	3	4	5
C , см	6	12	18	20	30

r , см	1	2	3	4	5
S , см ²	3	12	27	48	75

В первом случае отношение соответственных величин постоянно (равно 6), а во втором нет.

Табл. 3

t , ч	1	2	3	4	5	6
s , км	60	120	180	240	300	360
$\frac{s}{t}$	60	60	60	60	60	60

Забавно! 14 марта любители математики во всем мире отмечают День числа π . Почему 14 марта? По первым цифрам этого числа — 3,14: март соответствует цифре 3, дата — двум первым цифрам после запятой. А если взять более точное его значение, т. е. больше знаков после запятой, то момент праздника уточнится: 14 марта в 1 ч 59 мин 26 с. Это в соответствии с первыми восемью цифрами числа π — 3,1415926.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие величины называют прямо пропорциональными? Приведите примеры.
- Прочитайте двумя способами, используя слова «прямо пропорциональна», формулу работы $P = pt$.
- Чему равно отношение каждой пары соответственных значений s и t (таблица 3). Сформулируйте подмеченное свойство прямой пропорциональности.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧТО ТАКОЕ ПРЯМАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

121

Один килограмм яблок стоит 70 р. Составьте формулу для вычисления стоимости m кг яблок и заполните таблицу:

Масса яблок m , кг	5	10	15	20	25
Стоимость яблок C , р.					



Объясните, почему данная зависимость является прямой пропорциональностью. Чему равен коэффициент пропорциональности?

122

Банк предлагает вклады, на которые за год начисляется доход в 4,5 % от вложенной суммы. Заполните таблицу и составьте формулу для вычисления дохода I на вклад в D рублей.

Сумма вклада D , р.	1000	2000	3000	4000	5000
Доход I , р.					



Объясните, почему доход пропорционален сумме вклада. Чему равен коэффициент пропорциональности?

123

Определите, является ли зависимость, представленная в таблице, прямой пропорциональностью или не является. В случае положительного ответа найдите коэффициент пропорциональности.

А) Расстояние s (м), которое прошёл человек, сделавший n шагов при постоянной длине шага.

Б) Расстояние s (м), которое пролетает камень, падающий с высоты 80 м, за время t (с).

А)

n	1000	2000	3000	4000
s , м	600	1200	1800	2400

Б)

t , с	1	2	3	4
s , м	5	20	45	80

124

Вместимость консервной банки, имеющей форму цилиндра, можно вычислить по формуле $V = \pi r^2 h$ (r — радиус дна, h — высота банки). Имеется набор банок А с одним и тем же радиусом и разными высотами и набор банок В с одной и той же высотой, но разными радиусами. Исследуйте зависимости вместимости банок от переменной величины в том и другом случае (берите $\pi \approx 3$) и определите, является ли она прямой пропорциональностью.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

125

Мотоциклист за некоторое время проехал расстояние, равное 30 км. Какое расстояние проедет за это же время автомобиль, скорость которого в 2 раза больше? Какое расстояние проедет за это же время велосипедист, если его скорость в 3 раза меньше?

126

Велосипедист проезжает расстояние от турбазы до почты за 30 минут. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать путь, в 2 раза больший? в 2 раза меньший? в 1,5 раза больший? в 1,5 раза меньший?

127

С помощью электронасоса за 7 секунд можно накачать в бак 20 литров воды.
а) За какое время можно этим же насосом наполнить бак, вмещающий 200 литров воды? 120 литров воды?

б) Сколько литров воды можно накачать этим насосом за 14 секунд? за 35 секунд?

Образец. Можно решать задачу по действиям, вычислив сначала, сколько воды накачивается за одну секунду. Но вы знаете, что количество накачиваемой воды пропорционально времени работы насоса, поэтому можете рассуждать иначе, гораздо эффективнее: 200 л в 10 раз больше, чем 20 л, поэтому и времени потребуется в 10 раз больше, т. е. 70 с. Рассуждая так же, доведите решение до конца.

128

Оля шла с постоянной скоростью и за 12 мин прошла 600 метров.

а) Сколько метров прошла Оля за первые 4 мин? Сколько метров пройдёт она в следующие 6 мин, если будет идти с такой же скоростью?

б) Сколько времени ей потребовалось, чтобы пройти 150 м? Сколько времени потребуется, чтобы пройти 1 км 200 м?

129

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС В кулинарной книге приведён рецепт салата «Летний» на 6 порций. Рассчитайте количество продуктов для 3 порций салата; для 12 порций салата.

ПРОДУКТЫ	6 порций	3 порции	12 порций
 Помидоры	300 г		
 Молодой картофель	250 г		
 Свежие огурцы	200 г		
 Зелёный лук	120 г		
 Укроп	70 г		
 Яйца	2 шт.		
 Майонез или сметана	50 г		

130

Зимой аквариумных рыбок кормят 3 раза в неделю. Примерная порция на одно кормление: сухая дафния — четверть чайной ложки на 5 рыбок, мотылёк — 3 штуки на одну рыбку средней величины. Сколько корма каждого вида надо запасти на 4 недели, если в аквариуме 25 рыбок? 50 рыбок?

131

Из 360 г шерстяной пряжи можно связать шарф шириной 10 см и длиной 2 м. Сколько такой же пряжи потребуется, чтобы связать шарф шириной 40 см и длиной 1 м?

132

а) За определённое время с помощью принтера было распечатано 30 страниц. Сколько страниц будет распечатано за это же время на принтере, производительность которого на 50 % больше?

б) В садовом хозяйстве за сезон собирают 600 кг смородины. После специальных мер урожайность кустов удалось повысить на 20 %, при этом число кустов увеличили в 2 раза. Какой урожай можно теперь ожидать в хозяйстве?

2.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие величины называют обратными пропорциональными.
- Как определить, является ли зависимость обратной пропорциональностью.
- Как рассуждать при решении задач, в которых рассматриваются обратно пропорциональные зависимости.

Табл. 1: $t = \frac{s}{v}$, $s = 60$ км

v , км/ч	10	12	15	20	30	60
t , ч	6	5	4	3	2	1

Diagram showing relationships between velocity and time values:

- From 10 to 12: $\cdot 2$
- From 12 to 15: $\cdot 1,2$
- From 15 to 20: $\cdot 1,3$
- From 20 to 30: $\cdot 1,5$
- From 30 to 60: $\cdot 2$
- From 6 to 5: $:2$
- From 5 to 4: $:1,2$
- From 4 to 3: $:1,3$
- From 3 to 2: $:1,5$
- From 2 to 1: $:2$

Табл. 2: $v = \frac{s}{t}$, $s = 60$ км

t , ч	1	2	3	4
v , км/ч	60	30	20	15

Diagram showing relationships between time and velocity values:

- From 1 to 2: $\cdot 2$
- From 2 to 3: $\cdot 1,5$
- From 3 to 4: $\cdot 1,3$
- From 60 to 30: $:2$
- From 30 to 20: $:1,5$
- From 20 to 15: $:1,3$

ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

Каждая из рассмотренных в предыдущем пункте формул, задающих прямо пропорциональную зависимость, — $S = ab$, $s = vt$, $P = pt$, $C = cm$ — связана с ещё одним видом зависимости — обратной пропорциональностью. Это не менее распространённый, чем прямая пропорциональность, вид зависимости между величинами, существующими в окружающем нас мире. И вы, конечно, встречались с соответствующими примерами на уроках физики. Здесь вы познакомитесь с математическим содержанием этого понятия, рассмотрите свойства обратной пропорциональности, усовершенствуете умение применять в рассуждениях идею пропорциональности.

ЧТО ТАКОЕ ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ Рассмотрим, как и в предыдущем пункте, формулу пути $s = vt$.

Возьмём в качестве постоянной величины расстояние s , и пусть, например, $s = 60$ км. Время, которое требуется, чтобы пройти это расстояние, зависит только от скорости движения. Его можно вычислить, выразив время t из формулы пути: $t = \frac{s}{v}$. Зависимость времени от скорости при $s = 60$ км показана в таблице 1 на полях.

Во сколько раз увеличивается скорость v , во столько же раз уменьшается время движения.



Две величины называют обратно пропорциональными, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Говорят, что при постоянном расстоянии *время движения обратно пропорционально скорости движения*.

А в какой зависимости от времени находится скорость движения при постоянном расстоянии? Выразим из формулы $s = vt$ скорость v через длину пути s и время движения t : $v = \frac{s}{t}$. Составим таблицу соответствующих значений t и v (таблица 2).

Вы видите, что если на преодоление одного и того же расстояния, например, на мопеде потребовалось в 2 раза больше времени, чем на автомобиле, то скорость движения мопеда была в 2 раза меньше скорости автомобиля. Если на преодоление этого же расстояния на велосипеде ушло в 1,5 раза больше времени, чем на мопеде, то скорость велосипедиста была в 1,5 раза меньше скорости мопеда.

Можно сказать, что при постоянном расстоянии *скорость движения обратно пропорциональна времени движения*.

Формулы площади прямоугольника $S = ab$, стоимости $C = ct$, работы $P = pt$, так же как формулу пути, можно преобразовать, выразив из них другие величины:

$$a = \frac{S}{b}, \quad m = \frac{C}{c}, \quad t = \frac{P}{p}.$$

Поэтому они также дают примеры обратно пропорциональных величин:

- *сторона прямоугольника при постоянной площади обратно пропорциональна его соседней стороне;*
- *количество товара при одной и той же стоимости покупки обратно пропорционально цене товара;*
- *время, которое требуется для выполнения одной и той же работы, обратно пропорционально производительности.*

Если в формулах, подобных формуле $s = vt$, произведение двух величин постоянно, то эти переменные величины связаны обратно пропорциональной зависимостью. Все такие формулы могут быть представлены в виде $xy = k$, где x и y — переменные, k — постоянная. Эта формула называется *формулой обратной пропорциональности*. Её принято записывать и в другом виде: $y = \frac{k}{x}$.

СВОЙСТВО ОБРАТНОЙ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ Рассмотрим формулу обратной пропорциональности, записанную в виде $xy = k$. Она выражает важное свойство обратно пропорциональной зависимости:



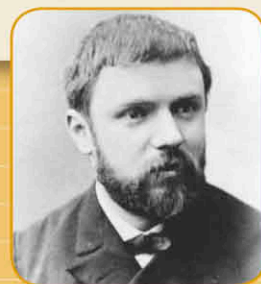
Если две величины обратно пропорциональны, то произведение их соответственных значений равно одному и тому же числу.

Это свойство часто используют, чтобы выяснить, является ли зависимость обратной пропорциональностью.



Так же как и в случае прямой пропорциональности, не любая зависимость, в которой увеличение одной величины влечёт за собой уменьшение другой, является обратной пропорциональностью. Например, сумма двух смежных углов постоянна, и, чем больше один из углов, тем меньше другой. Но эта зависимость не является обратной пропорциональностью. В этом можно убедиться, составив формулу этой зависимости. Если обозначить один из двух смежных углов α , а другой β , то получим равенство $180^\circ = \alpha + \beta$, или $\alpha = 180^\circ - \beta$.

Рассматривая понятия прямой и обратной пропорциональности, мы видели, что многие зависимости между самыми разными величинами с математической точки зрения представляют собой одно и то же: они описываются одним и тем же понятием, обладают одними и теми же свойствами. И вот саму эту сущность, объединяющую разрозненные явления окружающего нас мира, исследует и описывает математика. Очень образно подчёркивал математическое устройство мира и всеобщий характер математических законов французский математик XIX в. Анри Пуанкаре, который считается величайшим математиком всех времён. Он говорил: «Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем». Именно поэтому считается, что математика — это язык природы, язык, с помощью которого можно объяснять, как устроен мир.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие величины называют обратно пропорциональными? Приведите примеры.
- Выразите из формулы работы производительность p и время работы t . Прочитайте двумя способами, используя слова «обратно пропорциональна», формулу работы.
- Вычислите произведение соответственных значений v и t (таблица 1). Сформулируйте соответствующее свойство обратной пропорциональности.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧТО ТАКОЕ ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ

133

Площадь S прямоугольника равна 30 см^2 . Выразите сторону b из формулы площади прямоугольника и заполните таблицу.

$a, \text{ см}$	3	5	6	9	15
$b, \text{ см}$					

Объясните, почему данная зависимость является обратной пропорциональностью. Чему равно произведение длин сторон в каждом случае?

134

На 600 р. надо купить конфет одного сорта. Пользуясь формулой $m = \frac{C}{c}$, где C — общая стоимость покупки, c — цена одного килограмма конфет, m — масса купленных конфет, заполните таблицу.

$c, \text{ р.}$	240	120	80	60	30
$m, \text{ кг}$					

- а) Объясните, почему зависимость массы купленных конфет m от их цены при постоянной стоимости покупки является обратной пропорциональностью. Чему равно произведение цены конфет на их массу в каждом случае?
- б) В какой зависимости находится цена конфет c от массы купленных конфет m при постоянной стоимости покупки?

135

Задайте формулой и определите, прямой или обратной пропорциональностью является зависимость:

- а) числа n одинаковых учебников, которые можно разместить на полке длиной 900 мм, от толщины учебника l (мм);
- б) расхода бензина V (л) от пройденного автомобилем пути s (км), если на 1 км в среднем расходуется 0,08 л бензина.

136

1) Определите, является ли зависимость, заданная формулой, прямой или обратной пропорциональностью:

а) $N = 16t$, где N — число распечатанных принтером страниц, t — длительность печати (в минутах).

б) $t = \frac{96}{n}$, где n — скорость печати принтера (число страниц в минуту), t — длительность печати (в минутах).

2) Для прямой пропорциональности укажите коэффициент пропорциональности и объясните его смысл; для обратной пропорциональности найдите произведение соответственных значений переменных и объясните его смысл. «Прочитайте» словами каждую зависимость.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

137

- а) Для художественной студии купили альбомы, заплатив за них 1800 р. Сколько будет стоить такое же количество коробок с красками, если их цена в 2 раза больше цены альбома? мелков для рисования, цена которых в 1,8 раза меньше цены альбома?
- б) Для школьного вечера купили 12 кг яблок. Сколько на эти же деньги можно купить груш, цена которых в 2 раза больше цены яблок? апельсинов, цена которых в 1,5 раза меньше цены яблок?
- в) Заготовленного корма хватит двум кроликам на 120 дней. На сколько дней хватит этого корма одному кролику; 10 кроликам; 12 кроликам?



138

Определите вид зависимости и решите задачу.

1) Автобус проехал от одного города до другого за 6 часов. За какое время проедет это расстояние автомобиль, скорость которого в 1,5 раза больше скорости автобуса? мотоциклист, если он едет со скоростью, в 1,2 раза меньшей скорости автобуса?

2) Автомобиль, двигаясь по шоссе с постоянной скоростью, проехал до первой остановки для отдыха 240 км. Какое расстояние проехал за это время грузовой трейлер, скорость которого в 1,2 раза меньше скорости автомобиля? мотоциклист, скорость которого в 1,5 раза больше скорости автомобиля?



139

1) Разберите решение задачи.

Участник школьных соревнований пробежал 60 м за 12 с. За сколько секунд пробежит 90 м спортсмен, скорость которого в 2 раза больше скорости школьника?

Решение. Эту задачу можно решить, вычислив скорости школьника и спортсмена. Но можно применить в рассуждении идею пропорциональности:

● время движения обратно пропорционально скорости движения при постоянном расстоянии, поэтому 60 м спортсмен пробежит в 2 раза быстрее школьника, т. е. за 6 с;

● время движения прямо пропорционально расстоянию при постоянной скорости, поэтому на 90 м спортсмен затратит в 1,5 раза больше времени, чем на 60 м, т. е. 9 с.

2) Решите задачу, применив разобранный способ рассуждения.

а) Чтобы выполнить заказ за 15 дней, мастерская должна шить по 10 курток в день. На сколько курток надо увеличить ежедневную норму, чтобы выполнить заказ за 5 дней?

б) Чтобы связать шарф длиной 200 см, нужно 280 г шерсти. На сколько больше шерсти потребуется, чтобы связать шарф такой же ширины длиной 300 см?

140

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

Фирма закупает чай и упаковки для фасовки чая перед поставкой его в магазин. Вычислите, какие из имеющихся упаковок обойдутся фирме для закупленной партии чая дешевле всего.

№ п/п	Масса чая в упаковке, г	Количество упаковок	Цена пустой упаковки, р.
1	30	800	2
2	60		2
3	240		4
4	300		6

141

Отчёт о результатах исследования был распечатан на принтере за 30 мин. За сколько минут будет распечатан этот отчёт на принтере, производительность которого на 25 % больше?

142

В связи с увеличением числа учащихся в школе школьная столовая стала закупать в 1,5 раза больше муки для пирожков. Во сколько раз увеличились расходы на муку, если она подорожала на 20 %? На сколько процентов повысились расходы столовой на муку?

2.4

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

● Что называется пропорцией и в чём состоит её основное свойство.

ВЫ УЗНАЕТЕ:

● Как применяются пропорции при решении задач на прямую и обратную пропорциональные зависимости.

Пропорция

Крайние члены пропорции

$$a : b = c : d; \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Средние члены пропорции

Основное свойство пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad a : b = c : d$$

$$ad = bc$$

ПРОПОРЦИИ. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ПРОПОРЦИЙ

С понятиями пропорциональности и отношения связано понятие пропорции. Это слово вы наверняка много раз слышали и понимаете его смысл: оно означает «соразмерность, гармоничность». Для живописца важно соблюдение пропорций изображаемого предмета, для архитектора важны пропорции здания, для градостроителя — пропорции проектируемой площади, для дизайнера — удачные пропорции элементов оформления. Математические пропорции лежат и в основе музыки.

ЧТО ТАКОЕ ПРОПОРЦИЯ Возьмём отношения $\frac{18}{6}$ и $\frac{0,6}{0,2}$. Каждое из них равно 3, поэтому можно записать: $\frac{18}{6} = \frac{0,6}{0,2}$. Такие равенства называют пропорциями.

! Если отношение $\frac{a}{b}$ равно отношению $\frac{c}{d}$, то равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ называют **пропорцией**.

Записывать пропорцию можно и в строчку:
 $a : b = c : d$.

Читают пропорцию по-разному: «отношение a к b равно отношению c к d » или « a так относится к b , как c относится к d ».

Числа, образующие пропорцию, имеют специальные названия: a и d называют **крайними членами пропорции**, b и c — **средними членами пропорции**.

Любая пропорция обладает следующим свойством, которое называют **основным свойством пропорции**:

! Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов. С помощью букв это записывается так: если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.

Проиллюстрируем это свойство на конкретном примере:

$$\frac{18}{6} = \frac{0,6}{0,2}; \quad 18 \cdot 0,2 = 3,6 \text{ и } 6 \cdot 0,6 = 3,6, \\ \text{т. е. } 18 \cdot 0,2 = 6 \cdot 0,6.$$

С помощью основного свойства пропорции можно по трём известным её членам находить неизвестный.

Пример. Найдём неизвестный член пропорции $\frac{18}{4} = \frac{63}{x}$.

По основному свойству пропорции имеем
 $18x = 4 \cdot 63$.

Теперь находим неизвестный множитель:

$$x = \frac{4 \cdot 63}{18} = 14.$$



Докажем, что основное свойство пропорции справедливо для любой пропорции. Рассмотрим пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Приведём дроби в левой и правой частях равенства к общему знаменателю bd : $\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}$. Получили две равные дроби, у которых знаменатели равны, значит, равны и числители, т. е. $ad = bc$.

КАК ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПРОПОРЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

В пункте 2.3 вы решали задачи, в которых речь идёт о прямо пропорциональных или обратно пропорциональных величинах. Такие задачи часто можно решить, составив пропорцию.

Задача 1. На 15 одинаковых костюмов потребовалось 55 м ткани. Сколько нужно этой ткани, чтобы сшить 6 таких же костюмов?

Решение. Количество ткани прямо пропорционально числу костюмов: во сколько раз меньше число костюмов, во столько же раз меньше расход ткани. Обозначим количество ткани (в метрах), которое требуется для 6 костюмов, буквой x и составим равные отношения $\frac{15}{6}$ и $\frac{55}{x}$. Получаем пропорцию: $\frac{15}{6} = \frac{55}{x}$.

По основному свойству пропорции имеем
 $15x = 55 \cdot 6$.

Отсюда находим x :

$$x = \frac{55 \cdot 6}{15} = 22.$$

Ответ: для 6 костюмов потребуется 22 м ткани.

По условию этой задачи можно составить и другую пропорцию. Отношения $\frac{55}{15}$ и $\frac{x}{6}$ выражают количество метров ткани, которое требуется на один костюм. Поэтому $\frac{55}{15} = \frac{x}{6}$.

Задача 2. Велосипедист ехал со скоростью 16 км/ч и за 2,5 ч доехал от одного посёлка до другого. Сколько времени потребовалось бы ему, чтобы пройти этот путь пешком со скоростью 5 км/ч?

Решение. Время движения обратно пропорционально скорости при постоянном расстоянии: во сколько раз меньше скорость, во столько же раз больше требуемое время. Обозначим неизвестное время (в часах) буквой x и составим пропорцию: $\frac{16}{5} = \frac{x}{2,5}$. Из пропорции находим x : $x = \frac{2,5 \cdot 16}{5} = 8$.

Ответ: потребуется 8 ч, чтобы пройти этот путь пешком.



При решении задач с помощью пропорций удобно делать краткую запись условия. Например, в задаче 1:

↓ 15 кост. — 55 м ↓
↓ 6 кост. — x м ↓

Стрелками показаны величины, составляющие равные отношения. Получаем пропорцию:

$$\frac{15}{6} = \frac{55}{x}.$$



При решении задач, в которых величины связаны обратно пропорциональной зависимостью, тоже поможет краткая запись условия. Например, в задаче 2:

↓ 16 км/ч — 2,5 ч ↑
↓ 5 км/ч — x ч ↑

Стрелками указан «порядок», в котором нужно брать величины при составлении пропорции. Получаем $\frac{16}{5} = \frac{x}{2,5}$.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Что называют пропорцией?
- Прочитайте разными способами пропорцию $\frac{4}{8} = \frac{15}{30}$. Назовите её крайние и средние члены.
- Сформулируйте основное свойство пропорции. Проверьте с помощью основного свойства, является ли пропорцией равенство $4 : 15 = 2 : 7,5$.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРОПОРЦИЯ. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПРОПОРЦИИ

143

Запишите в виде пропорции:

- а) 12 так относится к 16, как 3 относится к 4;
 б) отношение 18 к 3 равно отношению 12 к 2;
 в) 100 во столько раз больше 30, во сколько раз 40 больше 12;
 г) 50 составляет такую же часть от 70, какую 10 составляет от 14.

144

Проверьте двумя способами, является ли пропорцией следующее равенство:

- а) $\frac{10}{40} = \frac{1,5}{6}$; б) $14 : 2 = 32 : 4$; в) $\frac{5,5}{11} = \frac{0,4}{0,8}$; г) $\frac{5}{6} : \frac{1}{2} = 5 : 3$.

145

Найдите неизвестный член пропорции.

- а) $\frac{x}{21} = \frac{2}{7}$; б) $\frac{3}{5} = \frac{y}{2}$; в) $\frac{0,4}{3} = \frac{0,3}{x}$; г) $3 : y = 2 : 5$; д) $9 : 0,8 = a : 1,6$.

146

- 1) Из пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ выразите сначала число a и затем число d . Сформулируйте правило нахождения неизвестного крайнего члена пропорции.
 2) Из этой же пропорции выразите число b и затем число c . Сформулируйте правило нахождения неизвестного среднего члена пропорции.

147

Найдите неизвестное число x : а) $\frac{2x}{9} = \frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{5} = \frac{2}{5x}$; в) $\frac{1,5}{4x} = \frac{0,3}{10}$; г) $\frac{1,5x}{2} = \frac{4,5}{4}$.

148

Составьте различные пропорции из произведений:

- а) $18 \cdot 3 = 9 \cdot 6$; б) $0,4 \cdot 4,8 = 1,2 \cdot 1,6$.

149

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

- 1) Дана пропорция $10 : 5 = 16 : 8$. Проведите эксперимент: а) поменяйте местами её средние члены и проверьте, является ли полученное равенство пропорцией; б) сделайте то же самое, поменяв местами крайние члены; заменив каждое отношение обратным.
 2) Сформулируйте подмеченные вами свойства. Покажите, что они верны для любой пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
 3) Найдите отношение $a : b$, если известно, что:
 а) $a : 1,2 = b : 1,5$; б) $0,9 : b = 2,7 : a$.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

150

Обозначьте неизвестную величину буквой и составьте две разные пропорции по условию задачи; найдите ответ на вопрос задачи:

- а) Таня занимается рассылкой объявлений. На запечатывание 100 конвертов у неё уходит 16 мин. Сколько конвертов запечатает она за 40 мин, если будет работать с такой же скоростью?

Подсказка. В качестве образца возьмите задачу 1 из текста параграфа.

- б) Ольга может за 30 с набрать на компьютере 160 знаков. Сколько знаков она наберёт за 5 мин, если будет работать с такой же скоростью?

Подсказка. Не забудьте выразить время в одних единицах.

Решите задачи (№ 151–155):

151

- а) Дождь шёл 2,5 ч, и за это время выпало 1,5 мм осадков. Сколько осадков выпало бы за 6 ч, если бы дождь шёл с такой же силой?
 б) За 2,5 минуты на принтере распечатали 15 страниц. За какое время можно распечатать на этом принтере 100 страниц?

152

- МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС** а) Расстояние между двумя посёлками на карте равно 4 см. Чему равно расстояние между этими посёлками на местности, если масштаб карты равен 1 : 200 000?

Образец. Обозначим расстояние между посёлками на местности буквой x . Масштаб карты — это отношение длины линии на карте к длине соответствующей линии на местности, значит, 4 так относится к x (в сантиметрах), как 1 к 200 000.

Составим пропорцию: $\frac{4}{x} = \frac{1}{200\,000}$.

Доведите решение до конца, выразите расстояние, полученное из пропорции, в километрах.

- б) Масштаб карты 1 : 20 000 000 (см. рис.). Измерьте расстояние между Рязанью и Саранском на карте и определите, чему равно расстояние между этими городами в действительности.

- в) Каким будет расстояние между Рязанью и Саранском на карте, масштаб которой 1 : 5 000 000?



153

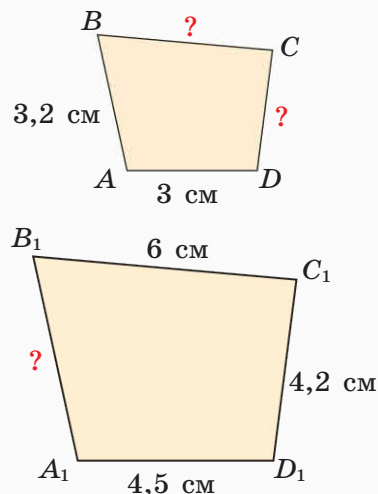
Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ является копией четырёхугольника $ABCD$, полученной с помощью компьютерной программы, которая увеличивает все размеры в одно и то же число раз.

- 1) Дополните равенства так, чтобы получились пропорции: $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{A_1B_1}{\dots}$; $\frac{A_1D_1}{AD} = \frac{B_1C_1}{\dots}$; $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{\dots}{B_1C_1}$.

Составьте ещё несколько пропорций.

- 2) Найдите неизвестные длины сторон.

- 3) Чему равно отношение длин соответственных сторон четырёхугольников? Чему равно отношение периметров этих четырёхугольников?



154

- а) Девять рабочих, работая с одинаковой производительностью, могут выполнить работу за 10 ч. Сколько ещё нужно рабочих, чтобы эта работа была выполнена за 6 ч?
 б) С помощью двух одинаковых насосов вода из бассейна откачивается за 3 ч. Сколько ещё надо подключить таких же насосов, чтобы вода вылилась за 2 ч?

155

Одно и то же расстояние один пешеход проходит за 2 ч, другой — за 3 ч. Они вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В. Первый до встречи прошёл 3,6 км. Определите расстояние между пунктами А и В.

2.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что такое пропорциональная система распределения.
- Как решать задачи на пропорциональное деление.



Слово «пропорциональный» происходит от латинского *proportione*, означающего «соответственно порциям», «согласно долям», «по количеству». Рассмотренная в задаче 1 прибыль делится пропорционально вложенным средствам.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

В своей повседневной жизни — при приготовлении различных смесей и растворов, блюд по кулинарным рецептам, при распределении работы и полученных доходов — у людей часто возникает необходимость решить задачу на пропорциональное деление, т. е. разделить ту или иную величину на части, пропорциональные данным числам. Иначе такие задачи называют задачами на деление в данном отношении. Вы уже не раз их решали. В этом параграфе вы вновь встретитесь с ними и рассмотрите несколько более сложные ситуации.

КАК РЕШАЮТ ЗАДАЧИ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

Задача 1. Два друга совместно вложили деньги в покупку садового инвентаря: один внёс 20 тыс. р., другой — 30 тыс. Они стали сдавать инвентарь в аренду и в конце сезона получили прибыль 25 тыс. р. Как им разделить между собой эту прибыль?

Решение. Обычно считается справедливым, чтобы прибыль распределялась в том же отношении, что и вложенные участниками средства, иными словами, пропорционально вложенным суммам. Деньги, внесённые друзьями, относятся как 20 к 30, следовательно, полученную прибыль надо распределить в отношении 20 : 30. Сократим это отношение, т. е. разделим каждое из входящих в него чисел на их общий множитель 10, получим более простое отношение 2 : 3.

Наши рассуждения привели нас к знакомой задаче на части. Всего имеется $2 + 3 = 5$ частей, поэтому на каждую приходится $25 : 5 = 5$ тыс. р. Следовательно, первый из друзей должен получить $5 \cdot 2 = 10$ тыс. р., а второй $5 \cdot 3 = 15$ тыс. р.

Система распределения прибыли, описанная в этой задаче, называется *пропорциональной*.

Рассмотрим несколько задач, связанных с делением в данном отношении.

Задача 2. Латунь — сплав меди и цинка — находит широкое применение в производстве электрооборудования, бытовых приборов. Одна из многочисленных марок латуни содержит медь и цинк в отношении 3 : 2. Какую часть сплава составляет медь, а какую — цинк?

Решение. Вся масса состоит из 5 равных частей: $3 + 2 = 5$. Три из этих частей приходится на медь, значит, медь составляет $\frac{3}{5}$ сплава, а цинк — $\frac{2}{5}$.



Задача 3. Известно, что суша и вода на поверхности Земли находятся примерно в отношении 3 : 7. Сколько примерно процентов поверхности Земли занято сушей и сколько водой?

При решении задачи можно рассуждать разными способами.

Способ 1. Найдём, какую часть поверхности Земли составляет суша, и выразим эту часть в процентах. Вся поверхность Земли состоит из $3 + 7 = 10$ равных частей. Три части приходятся на сушу, значит, суша составляет 0,3, или 30 %, всей поверхности Земли. Соответственно вода занимает 70 % поверхности Земли.

Способ 2. Вся поверхность Земли составляет 100 %, и эти 100 % нужно разделить пропорционально числам 3 и 7. Всего имеем $3 + 7 = 10$ частей, поэтому на каждую часть приходится $100 : 10 = 10$ %. Значит, суша занимает примерно $3 \cdot 10 = 30$ %, а вода — примерно $7 \cdot 10 = 70$ %.

«ДЛИННЫЕ» ОТНОШЕНИЯ Отрезок AB разделён точками C и D на три части так, что $AC : CD = 4 : 3$, а $CD : DB = 1 : 2$ (рис. 2.7).



Это условие принято записывать в виде одного «длинного» отношения. Для этого преобразуем второе отношение так, чтобы отрезок CD , как и в первом отношении, составлял 3 части. Умножим оба члена этого отношения на 3, получим $CD : DB = 3 : 6$. Теперь объединим два отношения в одно:

$$AC : CD : DB = 4 : 3 : 6.$$

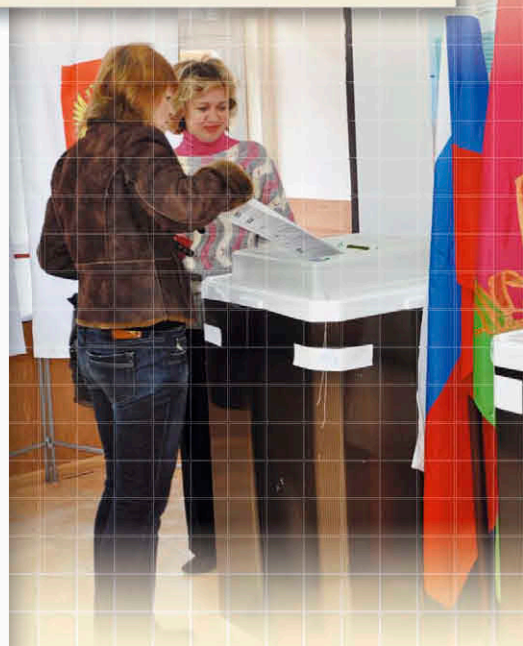
Говорят: «Отрезки AC , CD и DB пропорциональны числам 4, 3, 6».

Если известна длина отрезка AB , то можно найти длину каждого из отрезков, на которые он разделён. Пусть $AB = 26$ см. Всего имеем $4 + 3 + 6 = 13$ равных частей. На одну часть приходится $26 : 13 = 2$ см, поэтому $AC = 2 \cdot 4 = 8$ см, $CD = 2 \cdot 3 = 6$ см, $DB = 2 \cdot 6 = 12$ см.

Задача 4. Фирмы A , B и C вложили в некоторый проект соответственно 6, 4 и 2 млн р. и получили 18 млн р. прибыли. Как они разделят эту прибыль, если решено делить её пропорционально вложенным суммам?

Решение. Деньги, вложенные фирмами A и B , относятся как 6 к 4, а фирмами B и C — как 4 к 2. Запишем «длинное» отношение 6 : 4 : 2. Каждое из входящих в это отношение чисел можно разделить на их общий делитель — число 2, получим более простое отношение 3 : 2 : 1. Всего имеется $3 + 2 + 1 = 6$ равных частей. На одну часть приходится $18 : 6 = 3$ млн р. Следовательно, фирма A должна получить $3 \cdot 3 = 9$ млн р., фирма B — $3 \cdot 2 = 6$ млн р., а фирма C — 3 млн р.

Пропорциональная система применяется не только при распределении прибыли. Она широко распространена в избирательных системах, когда места в выборных органах распределяются между партиями пропорционально поданным за эти партии голосам. Если, например, в выборах в парламент принимали участие две партии и поданные за них голоса распределились в отношении 7 : 3, то и места в парламенте будут распределены между ними в том же отношении. В нашей стране пропорциональная система принята при выборах в Государственную думу.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Объясните происхождение и смысл слова «пропорциональный».
- Расскажите, как нужно было бы разделить между друзьями прибыль, равную 40 тыс. р. (задача 1).
- Найдите длину каждого из отрезков AC , CD и DB (рис. 2.7), если $AB = 39$ см.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ДЕЛЕНИЕ

156

- а) Площадь земель крестьянского хозяйства, занятая под посадку сельскохозяйственных культур, составляет 24 га и распределена между зерновыми и овощными культурами в отношении 5 : 3. Сколько гектаров занимают овощные культуры? Сколько гектаров занимают зерновые культуры?
- б) Площадь садов фермерского хозяйства составляет 35 га и распределена между яблонями и грушами пропорционально числам 4 и 3. Сколько гектаров занимают яблони и сколько груши?

157

- а) Одна из марок латуни, которая применяется для изготовления труб, содержит медь и цинк в отношении 13 : 7. Сколько меди в куске латуни этой марки, если цинка в нём 630 г?
- б) Мельхиор — сплав меди и никеля — широко применяют для изготовления посуды, ювелирных украшений, орденов и медалей, монет. Одна из марок этого сплава содержит медь и никель в отношении 3 : 1. Какова масса куска мельхиора этой марки, если меди в нём на 300 г больше, чем никеля?



Медаль «За отличие в воинской службе» II степени, мельхиор

158

- а) Размеры прямоугольной комнаты пропорциональны числам 4 и 5. Меньшая сторона равна 6 м. Найдите площадь комнаты.
- б) Размеры прямоугольной комнаты относятся как 5 к 3. Длина большей стороны равна 4 м. Найдите длину плинтуса, проложенного вдоль стен комнаты. (Ширина дверного проёма равна 1 м.)

159

Периметр прямоугольника равен 36 см. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что его соседние стороны относятся как: а) 1 : 5; б) 1 : 3; в) 1 : 2; г) 1 : 1. В каком случае получилась наибольшая площадь?

160

- а) Приправа из сушёных трав состоит из листьев базилика и укропа в отношении 2 : 9. Какую часть всей смеси составляют листья базилика? Какую часть смеси составляет укроп?
- б) Для приготовления отвара из лекарственных трав взяли цветки ромашки и календулы в отношении 4 : 5. Какой примерно процент в этой смеси составляют цветки ромашки? Ответ округлите до целых.

161

Отрезок AB разделён точкой C на части так, что $AC : AB = 3 : 5$ (рис. 2.8). Найдите отношение: а) $AC : CB$; б) $CB : AB$.

Рис. 2.8



«ДЛИННЫЕ» ОТНОШЕНИЯ

162

Упростите отношение, сократив его:

- а) 2 : 4 : 6; б) 10 : 15 : 15; в) 18 : 3 : 9; г) 8 : 4 : 2 : 6; д) 6 : 9 : 18 : 42.

163

Отношение, членами которого являются дробные числа, можно заменить равным отношением целых чисел. Для этого надо умножить все его члены на одно

и то же не равное нулю число. Замените данное отношение отношением целых чисел и, если возможно, упростите его:

а) $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{3} : \frac{3}{2} : 1$; в) $0,5 : 1 : 1,5$; г) $4,5 : 2,7 : 1,8$; д) $2 : \frac{2}{3} : \frac{4}{9}$.

164

Николай выполнил все домашние задания за 2,4 ч. Это время было распределено между математикой, русским языком, английским языком и историей в отношении $2 : 2 : 3 : 1$. Сколько времени ушло на каждый из этих предметов?

165

Определите, существует ли треугольник с заданным отношением длин сторон: 1) $4 : 5 : 6$; 2) $6 : 3 : 2$. Найдите длины сторон существующего треугольника, если его периметр равен 18 см.

166

Летом учащиеся трёх классов работали в теплицах: 5 класс — 28 ч, 6 класс — 42 ч, 7 класс — 56 ч. Тепличное хозяйство оплатило их работу в размере 54 000 р. Как разделить эту сумму между тремя классами?

167

В выставке собак участвовали собаки больших, средних и мелких пород, число которых находилось в отношении $4 : 8 : 3$. Сколько всего собак на выставке, если: а) собак мелких пород всего 6; б) собак больших и мелких пород вместе 35; в) собак средних пород на 30 больше, чем мелких?

168

В викторину «Столицы мира» решено включить вопросы по темам «Географическое положение», «Климат», «Экономика», «Культура» в отношении $4 : 2 : 1 : 5$. Сколько всего вопросов будет в викторине, если взять: а) x вопросов по географическому положению; б) y вопросов по экономике и культуре?

169

а) Из лекарственных трав — шалфея, ромашки, валерианы — составили сбор, взяв их в отношении $2 : 5 : 3$. Какую часть этого сбора составляет каждая из этих трав?
б) В сплав меди, алюминия и железа — одной из разновидностей бронзы — эти металлы входят соответственно в отношении $22 : 2 : 1$. Какую часть сплава составляет каждый металл? Выразите эту часть в процентах.

170

Три цветовода решили выращивать цветы на продажу. В дело они вложили соответственно 2 тыс., 1,3 тыс. и 1,7 тыс. р. Какой процент от прибыли получит каждый из них?

171

Фирмам А, В и С принадлежит 75 % акций некоторого предприятия, которые распределены между ними в отношении $4 : 12 : 9$. Остальные 350 тыс. акций принадлежат работникам этого предприятия. Сколько акций имеет каждая из фирм?

172

Периметр треугольника ABC равен 15,5 см. Найдите длины сторон этого треугольника, если $AB : BC = 3 : 5$, а $BC : AC = 2 : 3$.

173

Призовая сумма 12 400 р. была распределена между участниками соревнования, занявшими первые три места, следующим образом: сумма, полученная вторым, составила $\frac{2}{3}$ от суммы, полученной первым; в то же время сумма, полученная вторым, относится к сумме, полученной третьим, как $1\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$. Сколько рублей получил каждый призёр?

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ЗАДАЧИ НА «СЛОЖНЫЕ» ПРОПОРЦИИ

В старых учебниках арифметики (XVI–XIX вв.) большое внимание уделялось решению задач на прямую пропорциональность и обратную пропорциональность. Задачи были трудные, и существовало много специальных правил решения в зависимости от числа величин, которые рассматривались в задаче. Но все эти правила основывались на одном общем способе рассуждения, который позволяет решать на первый взгляд «нерешаемые» задачи. Рассмотрим его.

Задача. Бригада студентов из 16 человек за 20 дней собрала 180 тонн картофеля. Сколько картофеля уберёт бригада из 12 человек за 28 дней, если каждый человек будет работать с такой же производительностью?

Решение. Запишем кратко в две строки условие задачи, так чтобы неизвестная величина находилась в конце второй строки (для удобства):

16 студентов — 20 дней — 180 т,
12 студентов — 28 дней — x т.

Будем последовательно менять одну из величин в верхней строке, оставляя другие неизменными, пока не получим нижнюю строку, следующим образом:

16 студентов за 20 дней собрали 180 т;
1 студент за 20 дней соберёт в 16 раз меньше: $\frac{180}{16}$ т;
12 студентов за 20 дней соберут в 12 раз больше: $\frac{180 \cdot 12}{16}$ т;
12 студентов за 1 день соберут в 20 раз меньше: $\frac{180 \cdot 12}{16 \cdot 20}$ т;
12 студентов за 28 дней соберут в 28 раз больше: $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20}$ т.

Теперь проведём вычисления и получим ответ: $\frac{180 \cdot 12 \cdot 28}{16 \cdot 20} = 189$ т.

Пользуясь этим приёмом, решите следующие задачи.

1 В конноспортивной школе на 5 лошадей за 30 дней расходуется 1000 кг овса. На сколько дней хватит 200 кг овса для 10 лошадей при той же норме?

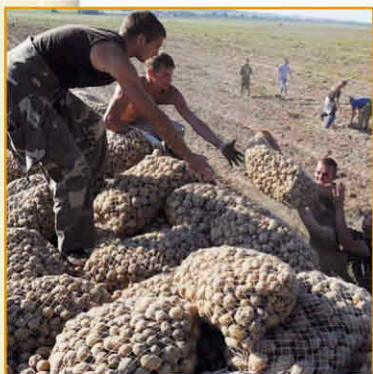
2 Для 15 человек, отправляющихся в экспедицию на 20 дней, заготовили 300 бутылок воды.

а) Сколько бутылок воды при той же норме надо добавить к уже заготовленным, если длительность экспедиции будет 30 дней и в ней будет участвовать 20 человек?

б) На сколько дней хватит 500 бутылок воды, если в экспедицию отправятся 10 человек?

в) Сколько человек можно отправить в 10-дневную экспедицию, если заготовлено 200 бутылок воды?

3 Команда из трёх операторов за 24 ч набрала на компьютере 700 страниц рукописи. Оставшиеся 350 страниц требуется набрать за 4 ч. На сколько человек надо увеличить команду, чтобы она могла выполнить эту работу?



ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Формула пути равномерного движения: $s = vt$.

Выразим из формулы скорость v :

$$v = \frac{s}{t}.$$

Выразим из формулы время t :

$$t = \frac{s}{v}.$$

По формуле $s = vt$ найдём путь, который проехал автомобиль, если $v = 90$ км/ч, $t = 20$ мин:

$$20 \text{ мин} = \frac{1}{3} \text{ ч};$$

$$s = 90 \frac{\text{км}}{\text{ч}} \cdot \frac{1}{3} \text{ ч} = 30 \text{ км}.$$

- 1 Используя формулу $C = st$, выражающую зависимость стоимости печенья от его массы и цены, вычислите, сколько надо заплатить за 400 г печенья, цена которого 28 р. за килограмм.
- 2 Из формулы площади прямоугольника $S = ab$ выразите сторону a .
- 3 Расстояние между двумя городами 600 км. Автомобиль выехал из одного города в другой. Запишите формулу зависимости расстояния s , которое ему осталось проехать через t ч после выезда, если он едет со скоростью v км/ч.

Две величины *прямо пропорциональны*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

$y = kx$ — формула прямой пропорциональности;

k — коэффициент пропорциональности.

Отношение соответственных значений прямо пропорциональных величин постоянно и равно коэффициенту пропорциональности: $k = \frac{y}{x}$.

Расстояние s , которое проходит турист, идущий со скоростью 4 км/ч, пропорционально времени движения:

$$s = 4t.$$

Отношение соответственных значений расстояния s и времени t равно 4:

$$\frac{s}{t} = 4.$$

Две величины *обратно пропорциональны*, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

$y = \frac{k}{x}$ — формула обратной пропорциональности, x и y — переменные величины, k — число.

Произведение соответственных значений обратно пропорциональных величин равно одному и тому же числу: $xy = k$.

Время, за которое автомобиль проезжает 60 км, обратно пропорционально скорости v :

$$t = \frac{60}{v}.$$

Произведение соответственных значений скорости и времени движения, за которое автомобиль проедет заданное расстояние, равно 60:

$$vt = 60.$$

4

Определите, какие из следующих утверждений верны (ответ объясните):

- 1) площадь круга пропорциональна его радиусу;
- 2) периметр квадрата пропорционален его стороне;
- 3) стоимость минуты телефонного разговора при одной и той же общей его стоимости обратно пропорциональна длительности разговора.

5

Пешеход за некоторое время прошёл 12 км. Какое расстояние проехал бы он за это же время на велосипеде, если его скорость была бы в 2,5 раза больше? Объясните свой ответ.

6

Автомобиль проехал расстояние между двумя пунктами за 2 ч. За какое время проедет это же расстояние автобус, если его скорость в 1,5 раза меньше? Объясните свой ответ.

Пропорцией называют равенство двух отношений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ или } a : b = c : d, \text{ где}$$

a и d — крайние члены;

b и c — средние члены.

Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов:

$$ad = bc.$$

$$\frac{2}{14} = \frac{7}{49} \text{ — пропорция;}$$

2 и 49 — крайние члены;

14 и 7 — средние члены.

$$2 \cdot 49 = 14 \cdot 7.$$

Найдём неизвестный член пропорции $\frac{a}{8} = \frac{5}{4}$:

$$a \cdot 4 = 8 \cdot 5;$$

$$a = \frac{8 \cdot 5}{4} = 10.$$

7

Найдите неизвестный член пропорции $\frac{3}{8} = \frac{x}{2,4}$.

8

Решите задачу, составив по её условию пропорцию:

Из 15 т руды получено 3 т меди. Сколько тонн меди получится из 20 т этой руды?

9

Отрезок AB , длина которого равна 21 см, разделён точками C и D на три части в отношении 2 : 3 : 5. Чему равна длина каждой части?

10

В сплав входят медь и олово в отношении 4 : 1. Сколько процентов сплава составляет медь?

11

Число учащихся первых, вторых, третьих и четвёртых классов в начальной школе пропорционально числам 8, 10, 9 и 9. Какую часть всех учащихся начальной школы составляют учащиеся первых классов?



3

ГЛАВА

ВВЕДЕНИЕ В АЛГЕБРУ

- БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ПОДСТАНОВКИ
- БУКВЕННАЯ ЗАПИСЬ СВОЙСТВ ДЕЙСТВИЙ НАД ЧИСЛАМИ
- ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ
- РАСКРЫТИЕ СКОБОК
- ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ СЛАГАЕМЫХ

Узнайте больше

- ЕЩЁ РАЗ О ЗАКОНАХ АЛГЕБРЫ

ИНТЕРЕСНО

Слово «алгебра», как и цифры, которыми мы сейчас пользуемся, пришло к нам от арабов. Его источник — название трактата великого учёного Средневековья Мухаммеда аль-Хорезми. В этом трактате алгебра впервые излагается как самостоятельная наука. Назывался трактат так: «Китаб аль-джебр валь-мукабала» (в переводе с арабского — «Книга о восстановлении и противопоставлении»). Аль-джебр (восстановление) и аль-мукабала (противопоставление) — два специальных действия, используемые при решении уравнений. От слова «аль-джебр» и произошло название науки «алгебра».

Интересно, что широко распространённый сегодня термин «алгоритм» также напрямую связан с именем аль-Хорезми, от латинского написания которого он и произошёл.

ی سوم ن ب دم حم
خوارزمی

3.1

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

- Как вычисляют числовое значение буквенного выражения.
- Какие значения букв в выражении называют допустимыми.

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как записывают выражение, противоположное данному.

Примеры буквенных выражений

$$\begin{array}{ccc} 5x - 4 & 0,1x^2 & x^2 + y^2 \\ -\frac{10}{a} & \frac{a+c}{ac} & a \cdot \frac{b}{c} \end{array}$$

Одна буква — это тоже буквенное выражение, самое короткое из всех возможных.

Некоторые правила записи буквенных выражений

- Числовой множитель записывают перед буквенным и точку между ними не ставят:

вместо $a \cdot (-2)$ пишут $-2a$;

- между буквенными множителями точку не ставят:

вместо $a \cdot b \cdot c$ пишут abc ;

- частное обычно записывают с помощью черты дроби:

вместо $a : b$ пишут $\frac{a}{b}$.

БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ И ЧИСЛОВЫЕ ПОДСТАНОВКИ

Математические выражения составляют из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок. Если в состав выражения входит хотя бы одна буква, то его называют буквенным выражением; в противном случае выражение называют числовым. Выражения — это своего рода слова математического языка, и важно уметь их правильно записывать и читать, «расшифровывать» содержащуюся в них информацию.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЧИСЛОВОГО ЗНАЧЕНИЯ БУКВЕННОГО ВЫРАЖЕНИЯ

Если все содержащиеся в выражении буквы заменить числами, то получится числовое выражение. Его значение, как известно, называют **значением выражения при данных значениях букв**. (Можно сказать иначе: «при данных значениях переменных».)

Пример 1. Найдём значение выражения $\frac{ab}{a-b}$ при $a = 3$ и $b = -7$.

Подставим в выражение $\frac{ab}{a-b}$ значения $a = 3$ и $b = -7$ и выполним вычисления:

$$\frac{ab}{a-b} = \frac{3 \cdot (-7)}{3 - (-7)} = \frac{-21}{10} = -2,1.$$



Обратите внимание на то, как была выполнена числовая подстановка:

- все содержащиеся в выражении буквы заменили числами;
- одинаковые буквы заменили одним и тем же числом;
- при подстановке отрицательного числа его заключили в скобки;
- в получившемся числовом выражении в числителе был восстановлен знак умножения.

Иногда сделать некоторый вывод о числовом значении буквенного выражения можно по самой его записи, без каких-либо вычислений. Возьмём, например, выражение a^2 . Что априори (т. е. заранее, независимо от опыта) можно сказать о любом его числовом значении?

Символом a^2 обозначено произведение одинаковых множителей $a \cdot a$. Вы знаете, что произведение двух чисел одного знака положительно. Значит, если вместо a подставить любое положительное или любое отрицательное число, значение выражения a^2 будет числом положительным. Если же $a = 0$, то $a^2 = 0$. Эти два вывода объединяют в один и говорят: *при любом значении a значение выражения a^2 есть число неотрицательное.*

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ Вы знаете, что число, противоположное данному числу, записывают с помощью знака «-». Так, число, противоположное 7, есть -7; число, противоположное -20, есть $-(-20)$, т. е. 20.

Знак «-» используется и для записи выражения, противоположного данному. Например, выражение, противоположное разности $6x^2 - 4$, записывают как $-(6x^2 - 4)$. Обратите внимание: чтобы записать выражение, противоположное разности $6x^2 - 4$, мы заключили её в скобки; тем самым мы показали, что знак «-» относится ко всему выражению.

Пример 2. Найдём значения выражений $50xy$ и $-50xy$ при $x = 1,2$ и $y = -0,6$.

Сначала вычислим значение произведения $50xy$. Подставив значения $x = 1,2$ и $y = -0,6$, получим

$$50xy = 50 \cdot 1,2 \cdot (-0,6) = -30 \cdot 1,2 = -36.$$

А чтобы найти значение противоположного выражения $-50xy$ при тех же значениях x и y , подсчёты уже не нужны.

В самом деле,

$$-50xy = -(-36) = 36.$$



Соответственные значения противоположных выражений есть числа противоположные.

ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВ В ВЫРАЖЕНИИ Буквы в выражении не всегда можно заменять любыми числами. Например, в дробь $\frac{1}{a-1}$ нельзя подставить вместо a число 1: при $a = 1$ её знаменатель будет равен 0, а на 0 делить нельзя. Точно так же в выражение $\frac{ab}{a-b}$ нельзя подставить вместо a и b равные числа.



Числа, которые можно подставлять вместо букв в буквенное выражение, называют допустимыми значениями букв.

Для выражения $\frac{1}{a-1}$ допустимыми значениями a являются все числа, кроме 1. В таком случае пишут: $a \neq 1$. Говорят также, что при $a = 1$ это выражение *не имеет смысла*. А для выражения $\frac{ab}{a-b}$ допустимыми являются такие пары значений a и b , в которых $a \neq b$. Например, при $a = 2$ и $b = -2$ значение выражения $\frac{ab}{a-b}$ вычислить можно: $\frac{ab}{a-b} = \frac{2 \cdot (-2)}{2 - (-2)} = -1$. А при $a = 2$ и $b = 2$ это выражение не имеет смысла.

Буквы и другие символы появились в математике в результате её длительного развития. Их употребление по-настоящему началось лишь в XV в., чему способствовало изобретение книгопечатания. До этого величины, условия задач, решения описывались словами, и поэтому алгебру тех времён называют риторической (словесной). Громоздкие записи затрудняли выполнение алгебраических действий и тормозили развитие науки. Переход от риторической алгебры к символической происходил на протяжении нескольких веков. Он был в основном завершён в XVII в.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Объясните, как следует выполнить подстановку в выражение $\frac{xy}{y-z}$ значений $x = -10$, $y = -2$, $z = -6$, и вычислите соответствующее значение этого выражения.

● Найдите значение выражения $1 - \frac{1}{3}x^2$ при $x = -0,6$. Запишите выражение, противоположное данному. Чему равно его значение при том же значении x ?

● Опровергните утверждение: любое значение выражения $-(x + y)$ есть число отрицательное.

● Какие значения буквы x являются допустимыми для выражения $x + 2$? для выражения $\frac{1}{x+2}$?

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫЧИСЛЯЕМ ЧИСЛОВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

174

Пусть $a = -5$, $b = 7$, $c = -2$. Подставьте вместо букв заданные числа и найдите значение выражения:

а) $a + b - c$; б) $\frac{c}{a - b}$; в) $\frac{b + c}{a}$; г) $\frac{b}{ac}$; д) $\frac{abc}{a - b + c}$.

175

Найдите значение каждого из выражений:

а) $x - (a + b)$ и $x - a - b$ при $x = 1$, $a = 1,5$, $b = -2,5$;

б) $2m - n$ и $2(m - n)$ при $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$;

в) $(a + c)(a - c)$ и $a^2 - c^2$ при $a = -0,6$, $c = -0,2$;

г) $x^2 + y^2$ и $(x + y)^2$ при $x = 0,1$, $y = -0,7$.

176

Найдите значение каждого из выражений при указанных значениях букв:

а) $m^2 - n$, $m - n^2$, $m^2 - n^2$, $(m - n)^2$ при $m = 0,6$, $n = 0,3$;

б) $(ac)^2$, a^2c , ac^2 , $2(ac)^2$, $(2ac)^2$ при $a = -0,5$, $c = 0,8$.

177

Пусть $x = -\frac{1}{3}$ и $y = 0,5$. Найдите значение каждого из выражений:

$-(x + y)$; $-(x - y)$; $-(-x + y)$; $-(-x - y)$.

178

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.1) можно вычислить по формуле $S = 2(ab + ac + bc)$. Объясните, как получается эта формула. Найдите S , если $a = 5$ см, $b = 7$ см, $c = 9$ см.

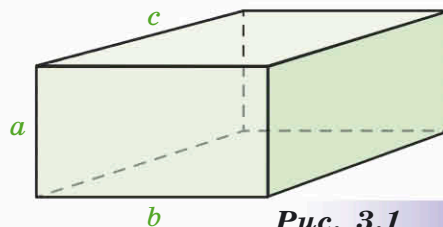


Рис. 3.1

Прежде чем давать ответы на поставленные вопросы, поэкспериментируйте с конкретными числами (№ 179–180):

179

Даны выражения: $2a$, $-2a$, $\frac{a}{2}$, $a - 2$, $a + 2$, a^2 , $a^2 + 4$, $a^2 - 4$.

Известно, что буквой a обозначено некоторое отрицательное число. Значения каких из выражений при этом условии также являются отрицательными числами? являются положительными числами? Значения каких из выражений при $a < 0$ могут быть как положительными, так и отрицательными числами?

180

Даны выражения: $n + 1$, $n + 2$, $2n$, $3n$, n^2 , $n^2 + 1$, $n^2 + 2$, $2n^2$.

Известно, что буквой n обозначено некоторое нечётное число. Значения каких из выражений при этом условии являются чётными числами?

181

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Автомобиль двигался по шоссе со скоростью 90 км/ч. Неожиданно на дорогу выбежал лось и замер, готовясь отразить атаку приближающегося к нему «зверя». Водитель мгновенно среагировал и резко нажал на тормоз. Удается ли ему избежать столкновения с животным, если лось оказался от автомобиля на расстоянии, равном 70 м? Для справки: тормозной путь автомобиля (в метрах), который до торможения двигался со скоростью v км/ч, можно приближённо рассчитать по формуле $s = \frac{1}{5}v + \frac{1}{200}v^2$.

СОСТАВЛЯЕМ БУКВЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ПО ЗАДАННОМУ УСЛОВИЮ

Запишите ответ на вопрос задачи в виде буквенного выражения (№ 182–184):

182

- а) У Димы были a рублей. Он купил 15 тетрадей по x р. и 8 тетрадей по y р. Сколько денег у него осталось?
 б) У Тани в копилке m монет по 5 р. и n монет по 10 р., причём имеющаяся сумма меньше 100 р. Сколько денег не хватает Тане до 100 р.?

183

- а) Купили 2 кг конфет по цене a р. за килограмм и ещё 1 кг конфет другого сорта за c р. Сколько заплатили за покупку? Какова средняя цена 1 кг смеси?
 б) Велосипедист в течение часа ехал по просёлочной дороге со скоростью x км/ч, а затем 3 ч по шоссе со скоростью y км/ч. Какое расстояние проехал велосипедист? Какой была средняя скорость его движения?

184

- а) Два автомобиля выехали одновременно навстречу друг другу из двух посёлков, расстояние между которыми 20 км. Один едет со скоростью a км/ч, а второй — со скоростью b км/ч. Через какое время они встретятся?
 б) Мотоциклист едет по шоссе за велосипедистом. Сейчас расстояние между ними 5 км. Через какое время мотоциклист догонит велосипедиста, если скорость мотоциклиста x км/ч, а велосипедиста — y км/ч?

185

Буквами b и c обозначены некоторые числа. Запишите:

- а) произведение суммы этих чисел и их разности;
 б) отношение произведения этих чисел к их сумме;
 в) разность квадратов этих чисел;
 г) квадрат суммы этих чисел.

186

Запишите в виде буквенных выражений:

- а) число, противоположное сумме чисел m и n , и сумму чисел, противоположных m и n ;
 б) число, обратное сумме чисел x и y , и сумму чисел, обратных x и y ;
 в) сумму попарных произведений чисел a , b и c и произведение попарных сумм этих чисел.

НАХОДИМ ДОПУСТИМЫЕ ЗНАЧЕНИЯ БУКВ В ВЫРАЖЕНИИ

187

При каком значении x не имеет смысла выражение:

- а) $\frac{x+1}{2x}$; б) $\frac{x+4}{x-4}$; в) $\frac{x^2}{x+1}$; г) $\frac{x-1}{x^2}$?

188

Подберите несколько пар значений x и y , при которых не имеет смысла выражение: а) $\frac{xy}{x+y}$; б) $\frac{x-y}{xy}$.

Неверно!

На координатной прямой точками отмечены числа a , b и c . Есть ли среди следующих утверждений неверные:

- 1) $a + b < 0$; 3) $ab < 0$; 5) $b - c < 0$;
 2) $a - b < 0$; 4) $bc < 0$; 6) $abc < 0$?



3.2

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

- Что общие утверждения в математике кратко записывают с помощью букв.
- Основные свойства сложения и умножения чисел.

Создателем алгебраической символики считается математик XVI в. Франсуа Виет. Он стал использовать буквы для обозначения не только неизвестных величин, что математики уже делали, но и любых чисел. Это был важный шаг в переходе от риторической алгебры к символической, благодаря которому появилась возможность составлять формулы, описывать общие закономерности, проводить доказательства в общем виде. Алгебраическая символика совершенствовалась в трудах учёных XVII–XVIII вв. француза Рене Декарта, англичанина Исаака Ньютона, швейцарца по происхождению, многие годы работавшего в России, Леонарда Эйлера.



Франсуа Виет
1540–1603

Французский математик, юрист по образованию. Был тайным советником при королях Генрихе III и Генрихе IV. Одно из самых замечательных его достижений на королевской службе — разгадка шифра, содержащего более 500 знаков.

БУКВЕННАЯ ЗАПИСЬ СВОЙСТВ ДЕЙСТВИЙ НАД ЧИСЛАМИ

Арифметика — наука о числах, основные её задачи связаны с вычислениями значений числовых выражений. Но для того чтобы коротко и наглядно записывать свойства арифметических действий, которые составляют основу вычислительных приёмов, нужны буквы.

БУКВЕННАЯ ЗАПИСЬ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ

Со свойствами сложения и умножения чисел и их буквенной записью вы познакомились при изучении математики в предыдущих классах. Напомним их.

Переместительные свойства сложения и умножения:

для любых чисел a и b
 $a + b = b + a$ и $ab = ba$.

Согласно этим свойствам, складывать и умножать два числа можно в любом порядке.

Сочетательные свойства сложения и умножения:

для любых чисел a , b и c
 $(a + b) + c = a + (b + c)$ и $(ab)c = a(bc)$.

Эти свойства означают, что при сложении и умножении трёх чисел можно группировать как первые два числа, так и последние два. Так как расстановка скобок на результат не влияет, то такие выражения можно писать без скобок:

$(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c$ и $(ab)c = a(bc) = abc$.

Распределительное свойство — совместное свойство сложения и умножения:

для любых чисел a , b и c
 $a(b + c) = ab + ac$.

ОТ ЧИСЕЛ К БУКВАМ Есть много других свойств арифметических действий, которыми вы нередко пользуетесь при вычислениях. Приведём два примера устных вычислений и в каждом случае посмотрим, с помощью каких действий мы получаем нужный результат.

Пример 1. Чтобы вычесть из числа 68 число 35, можно представить вычитаемое в виде суммы чисел 30 и 5 и сначала отнять от 68 число 30, а затем от получившегося результата отнять число 5.

Запишем эти рассуждения в виде цепочки равенств:

$$68 - 35 = 68 - (30 + 5) = 68 - 30 - 5 = 38 - 5 = 33.$$

Точно так же можно поступать и с другими числами:

$$97 - 51 = 97 - (50 + 1) = 97 - 50 - 1 = 47 - 1 = 46;$$

$$102 - 84 = 102 - (80 + 4) = 102 - 80 - 4 = 22 - 4 = 18.$$

Таким образом, независимо от того, какие конкретные числа берутся, мы пользуемся одним и тем же

приёмом: *чтобы вычесть из некоторого числа сумму двух чисел, вычитаем из него первое слагаемое и из полученного результата вычитаем второе слагаемое.*

С помощью букв данный приём может быть описан следующим образом:

$$a - (b + c) = a - b - c.$$

Это буквенное равенство говорит о том, что любую разность вида $a - (b + c)$ можно заменить выражением $a - b - c$, или, как говорят, *преобразовать* в выражение $a - b - c$. Числовое значение от этого не изменится.

Пример 2. Чтобы разделить число 327 на 3, можно рассуждать так: 327 — это сумма чисел 300 и 27; разделим на 3 отдельно каждое слагаемое — получим 100 и 9; сложив эти числа, найдём искомое частное — число 109.

Запишем ход наших рассуждений:

$$327 : 3 = (300 + 27) : 3 = 300 : 3 + 27 : 3 = 100 + 9 = 109.$$

Приём, с помощью которого мы выполнили деление, состоит в следующем: *чтобы разделить сумму двух чисел на некоторое число, отличное от 0, делим на это число отдельно каждое слагаемое и полученные частные складываем.*

С помощью букв эти действия могут быть описаны так:

$$(a + b) : c = a : c + b : c, \text{ где } c \neq 0.$$

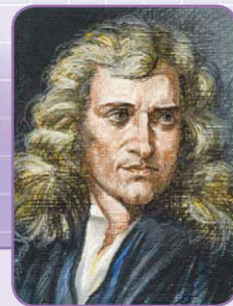
Если в качестве знака деления использовать черту дроби, то равенство примет такой вид:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

Это буквенное равенство говорит о том, что любую дробь вида $\frac{a + b}{c}$ можно преобразовать в сумму дробей $\frac{a}{c}$ и $\frac{b}{c}$; числовое значение останется тем же.

В таблице приведены ещё два примера приёмов вычислений и дана их буквенная запись.

Пример	$ \begin{aligned} 145 - 98 &= \\ &= 145 - (100 - 2) = \\ &= 145 - 100 + 2 = \\ &= 45 + 2 = 47 \end{aligned} $	$ \begin{aligned} 528 : 6 &= \\ &= 528 : (2 \cdot 3) = \\ &= (528 : 2) : 3 = \\ &= 264 : 3 = 88 \end{aligned} $
Приём	Чтобы из числа вычесть разность, можно сначала вычесть из него уменьшаемое и затем к полученному результату прибавить вычитаемое	Чтобы разделить число на произведение двух чисел, можно сначала разделить это число на один множитель, а затем полученный результат разделить на другой множитель
Буквенная запись	$a - (b - c) = a - b + c$	$a : (bc) = (a : b) : c$



Исаак Ньютон
1643–1727

Гениальный английский математик и физик. Открыл важнейшие законы природы и описал их алгебраически в виде формул и уравнений. В своей книге «Всеобщая арифметика» Ньютон писал: «Вычисления производятся либо при помощи чисел, как в арифметике, либо при помощи букв, как в алгебре. Оба приёма основаны на одинаковых принципах и ведут к одной цели, причём арифметика — частным путём, алгебра — всеобщим».

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Назовите и запишите в буквенном виде основные свойства сложения и умножения чисел.

● Рассмотрите два вычислительных приёма:

$$a + (b - c) = a + b - c;$$

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Дайте словесную формулировку каждого из них и приведите иллюстрирующие их числовые примеры.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ БУКВЫ ДЛЯ ЗАПИСИ СВОЙСТВ ЧИСЕЛ

189

С помощью какого приёма удобно найти значение данного выражения? Запишите соответствующую цепочку числовых равенств, а потом опишите используемый приём с помощью букв:

- а) $256 + 98$; б) $138 + 106$; в) $87 - 49$; г) $94 - 61$.

190

Запишите с помощью букв свойство арифметического действия, которое иллюстрируют данные равенства:

- | | | | |
|----------------------|---------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| а) $6 \cdot 0 = 0$, | б) $-1 \cdot 36 = -36$, | в) $12 \cdot 1 = 12$, | г) $1,7 + 0 = 1,7$, |
| $1,8 \cdot 0 = 0$, | $0,5 \cdot (-1) = -0,5$, | $1 \cdot (-8) = -8$, | $-6 + 0 = -6$, |
| $-7 \cdot 0 = 0$; | $-3 \cdot (-1) = 3$; | $1 \cdot \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$; | $\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$. |

191

Приведите три числовых примера, иллюстрирующих буквенное равенство:

- а) $\frac{y}{y} = 1$; б) $a + (-a) = 0$; в) $-(-x) = x$.

192

Как можно устно умножить какое-нибудь число на 1,5? Запишите соответствующее правило с помощью букв.

193

Запишите с помощью букв правило действий с дробями, которое проиллюстрировано данными равенствами:

- | | | |
|--|--|--|
| а) $\frac{1}{7} + \frac{3}{7} = \frac{1+3}{7}$, | б) $\frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2 \cdot 4}{3}$, | в) $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$, |
| $\frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{2+6}{11}$, | $\frac{5}{8} \cdot 13 = \frac{5 \cdot 13}{8}$, | $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1}$, |
| $\frac{3}{2} + \frac{9}{2} = \frac{3+9}{2}$; | $\frac{4}{3} \cdot 12 = \frac{4 \cdot 12}{3}$; | $\frac{11}{5} : \frac{2}{9} = \frac{11 \cdot 9}{5 \cdot 2}$. |

194

Выполните сначала действие с числовыми дробями, а затем с дробями, записанными буквами:

- а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$ и $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$; б) $\frac{2}{7} : \frac{5}{7}$ и $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$; в) $\left(\frac{2}{9} : \frac{2}{5}\right) : \frac{5}{7}$ и $\left(\frac{a}{b} : \frac{a}{c}\right) : \frac{c}{d}$.

РАБОТАЕМ С СИМВОЛАМИ

195

Рассмотрите рисунок 3.2, А. Для вычисления площади прямоугольника, изображённого на этом рисунке, можно составить выражение $a(b + c)$ или выражение $ab + ac$. Числовое значение будет одним и тем же: $a(b + c) = ab + ac$.

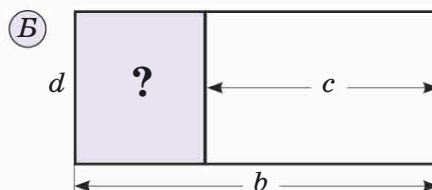
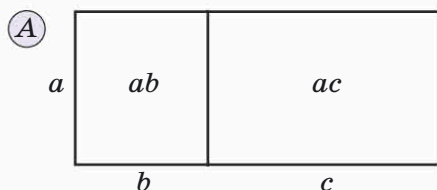


Рис. 3.2

Составьте два разных выражения для вычисления площади затонированной части прямоугольника, изображённого на рисунке 3.2, Б, и запишите соответствующее равенство.

Найдите два варианта ответа на вопрос задачи и запишите соответствующее равенство (№ 196–198):

196

- а) В магазине продаются орехи, расфасованные в пакеты по x граммов в каждом. Продали a пакетов с грецкими орехами, b пакетов с арахисом и c пакетов с фундуком. Какова общая масса проданных орехов?
- б) Автомобиль ехал сначала t часов по просёлочной дороге со скоростью x км/ч, а затем столько же времени по шоссе, но со скоростью y км/ч. Какое расстояние в общей сложности он проехал?

197

- а) Мама купила моток тесьмы, в котором было a м. Сначала она отрезала от него b м, а затем ещё c м. Сколько тесьмы осталось в мотке?
- б) У Тани в кошельке было x р. Чтобы оплатить в магазине покупку, она дала продавцу купюру достоинством y р. и получила z р. сдачи. Сколько у неё осталось денег в кошельке?

198

- а) В кафе завезли n упаковок питьевой воды. В каждой упаковке m бутылок по k литров. Сколько всего литров воды завезли в кафе?
- б) В магазин завезли n ящиков с пачками сливочного масла. Пачки в ящиках уложены в x слоёв; в одном слое y рядов по z пачек в каждом ряду. Сколько всего пачек масла завезли в магазин?

199

Составьте несколько различных выражений для вычисления площади прямоугольника, изображённого на рисунке 3.3, и запишите цепочку равенств.

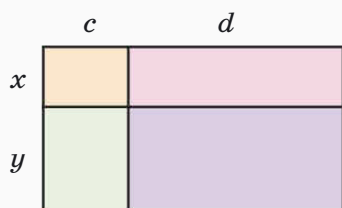


Рис. 3.3

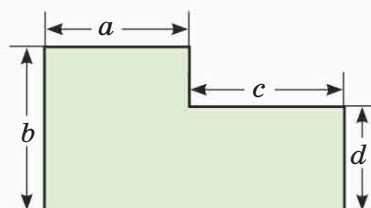


Рис. 3.4

200

Найдите площадь фигуры (рис. 3.4) сначала вычитанием площадей, а потом сложением площадей и запишите соответствующее равенство.

201

Если в смешанной дроби целая часть равна a , а дробная равна $\frac{b}{c}$ (a , b и c — натуральные числа), то эта дробь есть краткая запись суммы $a + \frac{b}{c}$. Запишите с помощью букв правило обращения смешанной дроби в неправильную дробь.

202

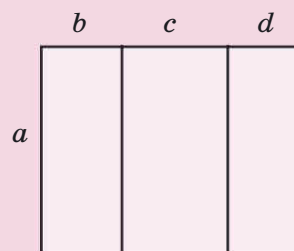
Запишите с помощью букв приём, используя который можно разделить:

- а) сумму трёх чисел на некоторое число;
- б) сумму четырёх чисел на некоторое число.

Неверно!

Ученик записал различные способы вычисления площади большого прямоугольника, который разрезан на три прямоугольника. Определите, какое из приведённых ниже равенств неверно.

- 1) $a(b + c + d) = ab + ac + ad$;
- 2) $a(b + c + d) = a(b + c) + ad$;
- 3) $ab + ac + ad = a(b + c) + a(c + d)$.



3.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что значит преобразовать буквенное выражение.
- Каков смысл слов «тождественно равные выражения».
- Правила преобразования сумм и произведений.

Термин «тождественный» заимствован из старославянского языка. Он означает полное сходство, совпадение; его можно понимать как «точно такой же».

$a + b = b + a,$
 $(a + b) + c = a + (b + c),$
 $ab = ba,$
 $(ab)c = a(bc),$
 $a(b + c) = ab + ac$ —
 это законы алгебры.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
БУКВЕННЫХ ВЫРАЖЕНИЙ

До сих пор вы преобразовывали буквенные выражения, исходя из опыта работы с числами. Но в алгебре преобразования выполняют с помощью специальных правил.

ЧТО ЗНАЧИТ ПРЕОБРАЗОВАТЬ ВЫРАЖЕНИЕ Преобразовать буквенное выражение — это значит заменить его другим выражением, отвечающим условию: оно принимает те же значения, что и исходное, при любых значениях букв, являющихся допустимыми как для первого, так и для второго выражения. Исходное и преобразованное выражения соединяют знаком «=» и называют **тождественно равными** или просто **равными**.

Например, равными являются выражения:

$$a - (b + c) \text{ и } a - b - c, \quad \frac{a+b}{c} \text{ и } \frac{a}{c} + \frac{b}{c}.$$

В основе преобразований выражений лежат свойства действий над числами. Буквенные равенства, выражающие соответствующие свойства, мы теперь будем считать **законами алгебры**. Опираясь на законы алгебры, мы будем последовательно вводить *правила преобразований буквенных выражений*.

ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СУММ Из переместительного и сочетательного законов сложения следует:



В любой сумме слагаемые можно как угодно переставлять и объединять в группы.

Например, $(a + b) + (c + d) = (a + d) + (b + c)$.

С помощью указанного правила можно преобразовывать и выражения, составленные с помощью знаков «+» и «-». Рассмотрим, например, выражение

$$2a - x + 3y.$$

Вычитание можно заменить сложением:

$$2a - x + 3y = 2a + (-x) + 3y.$$

Поэтому выражение $2a - x + 3y$ можно считать суммой выражений $2a$, $-x$ и $3y$. Меняя их местами, мы будем получать выражения, равные $2a - x + 3y$.

Такие выражения как $2a - x + 3y$ в математике иногда называют **алгебраическими суммами** — суммами потому, что их всегда можно представить в виде суммы, а алгебраическими потому, что в исходной записи они все же «чистыми» суммами не являются. В дальнейшем для краткости мы будем иногда говорить просто «сумма».

Обратите внимание: в алгебраической сумме слагаемые «путешествуют» вместе со своими знаками.



На первом месте в алгебраических суммах принято записывать слагаемое со знаком «+» (если, конечно, такое имеется), причём этот знак перед первым слагаемым опускают. Например, $-a - b + c = c - a - b$.

Буквенное выражение часто преобразовывают для приведения его к более простому виду.

Пример 1. Упростим выражение $m + n + m - n$.

Сумма $m + n + m - n$ состоит из четырёх слагаемых: m , n , m и $-n$. Поменяем слагаемые местами и сгруппируем их парами:

$$m + n + m - n = m + m + n + (-n) = \\ = (m + m) + (n + (-n)) = 2m + 0 = 2m.$$

Мы заменили сумму $m + m$ произведением $2m$ и воспользовались тем, что $n + (-n) = 0$ — это один из законов алгебры. А затем применили закон, согласно которому от прибавления нуля сумма не меняется.

ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ Из переместительного и сочетательного законов умножения следует:



В любом произведении множители можно как угодно переставлять и объединять в группы.

Пример 2. Упростим произведение $5y \cdot (-4x)$.

Сгруппируем отдельно числовые и буквенные множители и запишем вначале произведение числовых множителей, а затем буквенных, расположив их в алфавитном порядке:

$$5y \cdot (-4x) = 5 \cdot (-4) \cdot xy = (-20)xy = -20xy.$$

Обратите внимание: скобки, окружающие отрицательный множитель, записанный на первом месте, обычно опускают.

Пример 3. Упростим произведение $(-a)ca(-b)$.

На произведение буквенных множителей распространяется известное правило знаков «минус на минус даёт плюс»: $(-a) \cdot (-b) = ab$ — это закон алгебры. Поэтому

$$(-a)ca(-b) = +acab = acab = aabc = a^2bc.$$

КОЭФФИЦИЕНТ Если выражение является произведением, в котором первый множитель — число, а остальные множители — буквы, то это число называют **коэффициентом** этого произведения (от лат. *coefficient* — содействующий). Так, в выражении $-20xy$ числовой множитель -20 является коэффициентом. Заметим, что коэффициент, равный 1, обычно не пишут: равенство $1 \cdot a = a$ является законом алгебры. А вместо коэффициента -1 просто ставят знак «-». Например, $(-1) \cdot ab = -ab$.



$a + (-a) = 0$, $a + 0 = a$ — это законы алгебры.



В примере 1 промежуточные шаги можно было бы выполнить устно и записать:

$$m + n + m - n = 2m + 0 = 2m.$$



$a(-b) = -ab$, $(-a) \cdot (-b) = ab$ — это законы алгебры.



$1 \cdot a = a$ — это закон алгебры.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Из каких законов следует правило преобразования сумм? произведений? Сформулируйте каждое из них.

Упростите:

а) сумму $a - b + a + b$;

б) произведение $6m(-2n)$.

Приведите подробную запись и объясните каждый шаг.

Чему равен коэффициент произведения: $0,75ac$; $-\frac{2}{3}xyz$; abc ; $-ax$?

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММ

203

Упростите выражение:

а) $a + b + a$;

б) $x + y + y + y$;

в) $c + c + c + c$;

г) $n + n + n + n + n$;

д) $m + m + n + m + n$;

е) $a + b + c + a + b + a$;

ж) $\frac{a + a}{c + c + c}$;

з) $\frac{x + x + x + x}{y + y + y}$.

204

Чему равен периметр фигуры, изображённой на рисунке 3.5, А, Б?

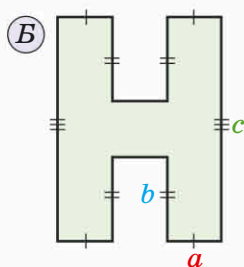
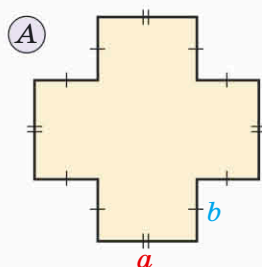


Рис. 3.5

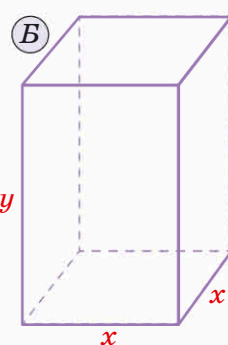
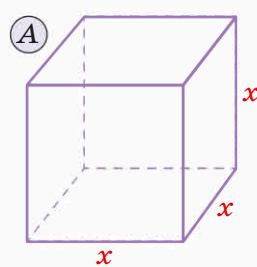


Рис. 3.6

205

Из проволоки нужно согнуть каркас прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.6, А, Б). Составьте выражение для вычисления длины проволоки, которая для этого потребуется.

206

Назовите слагаемые алгебраической суммы:

а) $a - b + c - d$;

в) $-2x - 3y - 10z + t$;

д) $xyz - x - 1$;

б) $-x - y - z - 10$;

г) $ab + ac - bc - 4$;

е) $-7bc - 5ac + 4$.

207

Составьте алгебраическую сумму из следующих слагаемых:

а) $a, -b, -c, d$;

в) $2a, -3b, 4c, -5$;

д) $-xy, -xz, -yz$;

б) $-x, -y, z, -t$;

г) $-p, 10q, -7m, 12$;

е) $-abc, ac, ab, -a, -b$.

208

Выражение $x + (-y) + (-2z)$ можно записать в виде алгебраической суммы, опустив знаки сложения перед скобками:

$$x + (-y) + (-2z) = x - y - 2z.$$

Воспользовавшись этим образцом, преобразуйте выражение:

а) $5a + (-b) + (-3c)$;

в) $-m + (-n) + p$;

б) $4x + y + (-6z)$;

г) $-m + (-n) + (-p)$.

209

Замените выражение равным, не содержащим скобок:

а) $a + (-b)$;

в) $-c + (-a)$;

д) $-x + (-y) + (-z) - d$;

б) $a - (-b)$;

г) $-x - (-y)$;

е) $a - (-x) + (-y) - (-c)$.

Подсказка. Знак « $-$ » перед скобкой означает вычитание; замените вычитание сложением и затем воспользуйтесь образцом из предыдущего задания.

210

Преобразуйте выражение в равное, изменив каким-либо способом порядок слагаемых:

а) $a + b + c$;

в) $x - a - c + d$;

д) $b - 3d + 10$;

б) $-x + y - z$;

г) $7 + 2a - 5c$;

е) $-5m + 3n - 1$.

211

Запишите выражение в виде суммы, восстановив знаки сложения:

- а)
- $x - y$
- ; б)
- $2a - 3c$
- ; в)
- $m - n - p$
- ; г)
- $5x - 2y - z$
- .

Упростите выражение (№ 212–213):

212

- а)
- $24 + m - 36$
- ; в)
- $a - 1 + 1$
- ; д)
- $-8 - 12 + c$
- ;
-
- б)
- $x - 10 - 2$
- ; г)
- $12 - b - 3$
- ; е)
- $10 - y - 10$
- .

213

- а)
- $b - a + b + a$
- ; в)
- $c - 10 + 15 - c$
- ; д)
- $a - 1 + a - 1 - a - 1$
- ;
-
- б)
- $x - y - z + y$
- ; г)
- $x - x - 15 - 15$
- ; е)
- $a - 3 + b + 3 - b$
- .

214

Известно, что n — нечётное число. Чётным или нечётным является число:

- а)
- $n + n$
- ; в)
- $n + n + n + n + 10$
- ;
-
- б)
- $n + n + n + n + n$
- ; г)
- $n + n + n + n + n + 5$
- ?

215

Пусть a — чётное число, а b — нечётное. Чётным или нечётным является число:

- а)
- $a + a + a + b + b$
- ; б)
- $a + a + b + b + b$
- ?

216

В первом ряду амфитеатра a мест, а в каждом следующем на 2 места больше, чем в предыдущем. Сколько всего мест в амфитеатре, если он состоит:

- а) из 5 рядов; б) из 10 рядов?

Неверно!В каком случае допущена ошибка при перестановке слагаемых в выражении $a - b + c - d$:

- 1)
- $a - b + c - d = a + c - b - d$
- ;
-
- 2)
- $a - b + c - d = a - d + c - b$
- ;
-
- 3)
- $a - b + c - d = b - a - d + c$
- ;
-
- 4)
- $a - b + c - d = c - b + a - d$
- ?

ПРИМЕНЯЕМ ПРАВИЛО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

217

Упростите выражение, заменив степень произведение одинаковых множителей:

- а)
- aaa
- ; г)
- $mmmmnn$
- ; ж)
- $aaaa + aaa + aaa + a$
- ;
-
- б)
- $xxxxx$
- ; д)
- $cdcdcdcd$
- ; з)
- $abbb + aabb + aaab$
- ;
-
- в)
- $aabbb$
- ; е)
- $xx + yyy$
- ; и)
- $axxxx + byyyy$
- .

218

Упростите выражение и назовите коэффициент произведения:

- а)
- $2x \cdot 3y$
- ; в)
- $10m \cdot 0,1n$
- ; д)
- $-8a \cdot 0,2b$
- ; ж)
- $-6a \cdot 0,3b \cdot (-c)$
- ;
-
- б)
- $2a \cdot 0,5b$
- ; г)
- $6a \cdot (-4)c$
- ; е)
- $-4x \cdot (-0,5y)$
- ; з)
- $-1,5m \cdot (-4n) \cdot 2k$
- .

219

Упростите произведение:

- а)
- $3m \cdot 2m$
- ; г)
- $3c \cdot 0,5x \cdot c$
- ; ж)
- $-\frac{2}{3}mn \cdot (-\frac{1}{2}n)$
- ;
-
- б)
- $10a \cdot (-0,1a)$
- ; д)
- $0,3m \cdot (-4n) \cdot m$
- ; з)
- $-0,25c \cdot 0,4cd$
- ;
-
- в)
- $-4c \cdot 0,25c$
- ; е)
- $x \cdot (-5y)(-x)$
- ; и)
- $1,5ab \cdot (-6b)$
- .

220

Упростите выражение:

а) $5xy \cdot (-0,2xy)$;

г) $4xy \cdot (-0,4yz)$;

ж) $-z \cdot xy(-yz)$;

б) $0,5ab \cdot \frac{1}{3}ba$;

д) $(-0,8abc)(-3bc)$;

з) $bc \cdot (-bc)(-2a)$;

в) $-6yz \cdot 0,4zy$;

е) $0,5xyz \cdot 2xy$;

и) $-m \cdot (-2mn) \cdot 3kn$.

221

Для каждого выражения из верхней строки выберите равное ему выражение из нижней строки и запишите соответствующее равенство:

$a(-b)c$

$(-c)(-a)b$

$ad(-c)(-b)$

$(-a)(-b)(-c)d$

$abcd$

$-abcd$

abc

$-abc$

222

Упростите каждое из произведений, найдите тождественно равные и запишите утверждение о равенстве произведений на алгебраическом языке:

а) $(-a)(-b)$

б) $(-x)(-y)(-z)$

в) $(-a)(-b)(-c)(-d)$

$-(-a)b$

$x(-y)(-z)$

$-a(-b)c(-d)$

$-a(-b)$

$-(-x)y(-z)$

$-ab(-c)(-d)$

$-(-a)(-b)$

$-(-x)(-y)(-z)$

$-(-a)(-b)(-c)(-d)$

223

Упростите выражение:

а) $-(-a)(-a)$;

г) $-(-a)(-a)(-a)$;

ж) $-aa(-a)(-a)$;

б) $-(-a)a$;

д) $-(-a)a(-a)$;

з) $a(-a)(-a)a(-a)$;

в) $(-a)(-a)(-a)$;

е) $(-a)(-a)(-a)(-a)$;

и) $-(-a)(-a)a(-a)a$.

Образец: $-a(-a)a(-a) = -aaaa = -a^4$.

224

1) Пользуясь определением степени, покажите, что $(-x)^2 = x^2$ и $(-x)^3 = -x^3$.

Подсказка. $(-x)^2 = (-x)(-x) = \dots$

2) Преобразуйте в выражение без скобок:

а) $(-x)^4$;

в) $(-x)^{15}$;

д) $(-x)^{100}$;

ж) $(-x)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$;

б) $(-x)^5$;

г) $(-x)^{20}$;

е) $(-x)^{201}$;

з) $(-x)^{2n-1}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Составьте выражение по условию задачи и упростите его (№ 225–226):

225

а) Всего в автопарке M машин, $\frac{5}{6}$ из них — автобусы, а $\frac{2}{3}$ этих автобусов — микроавтобусы. Сколько в автопарке микроавтобусов?

б) В продаже было x велосипедов, 80 % из них — двухколёсные, среди которых 20 % — гоночные. Сколько было в продаже гоночных велосипедов?

226

а) Первокурсникам одного из вузов предложили для изучения английский и испанский языки. Английский язык выбрали 60 % всех первокурсников, при этом четверть из них выразили желание изучать дополнительно ещё и испанский. Сколько студентов выбрали в качестве первого языка английский, а второго — испанский, если всего на первый курс было принято N человек?

б) Чтобы устроить в городском парке сиреневый сад, в отведённом для него месте высадили A кустов сирени; 40 % из них — кусты махровой сирени; пятую часть махровой сирени составляет сирень лиловая. Сколько в парке было высажено кустов лиловой махровой сирени?

227

Представьте дробь в виде произведения и назовите его коэффициент:

- а) $\frac{3a}{4}$; б) $\frac{x}{6}$; в) $\frac{-7c}{5}$; г) $\frac{5m}{-3}$; д) $-\frac{2c}{9}$.

Образец. Запишем дробь $\frac{3x}{2}$ в виде произведения. Для этого разделим числовой множитель в числителе на 2, получим

$$\frac{3x}{2} = \frac{3}{2}x = 1,5x.$$

228

Сократите дробь (воспользуйтесь приведённым образцом):

- а) $\frac{4xy}{5yz}$; б) $\frac{15km}{nm}$; в) $\frac{8ab}{abc}$; г) $\frac{7xyz}{21xz}$; д) $\frac{6mnk}{9knp}$.

Образец. Сократим дробь $\frac{2ab}{6ac}$. Числитель и знаменатель дроби — это произведения, имеющие общие множители 2 и a . Сокращать дробь на эти множители можно последовательно: $\frac{2ab}{6ac} = \frac{ab}{3ac} = \frac{b}{3c}$.

229

Упростите выражение:

- а) $(-x)^2x$; б) $(-x)^2(-x)$; в) $-x^2(-x)^2$; г) $x(-x)^3$; д) $-x \cdot x^3$; е) $(-x)(-x)^3$.

230

Подставьте в выражение ab вместо переменных a и b указанные выражения и выполните преобразования:

- а) $a = 3xy$, $b = -2xy$; б) $a = -0,1x$, $b = 20xz$.

231

Подставьте в каждое из выражений $2x$, x^2 , x^3 вместо переменной x выражение $-y$ и упростите получившееся выражение.

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

232

а) Школьная спортивная площадка имеет форму прямоугольника. При капитальном ремонте школы одновременно решили расширить площадку, увеличив её стороны соответственно в 1,5 и в 2 раза (*рис. 3.7*). Во сколько раз при этом увеличится площадь спортплощадки? Проиллюстрируйте ответ на рисунке. *Подсказка.* Обозначьте стороны исходной площадки какими-нибудь буквами и найдите отношение площади новой площадки к площади старой.

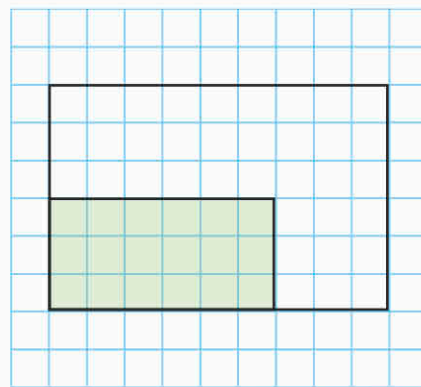


Рис. 3.7

б) Дайте ответ на вопрос предыдущей задачи при условии, что площадка имеет форму квадрата, а её стороны увеличили в 2 раза. Сделайте рисунок.

233

а) Кондитерская фабрика для транспортировки товара использует тару в форме прямоугольного параллелепипеда. В целях уменьшения расходов экономический отдел фабрики предложил использовать тару, размеры которой соответственно в 1,2, в 1,5 и в 2 раза больше размеров существующей тары. Во сколько раз увеличится вместимость тары?

б) При ремонте дачного домика были изменены размеры жилой комнаты прямоугольной формы. Её ширину за счёт чулана увеличили на 40 %, а высоту за счёт чердачного помещения — на 20 %. На сколько процентов увеличился объём комнаты?

3.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Что означают слова «раскрыть скобки».
- Правила раскрытия скобок в сумме, разности и произведении.

Скобки в математическом языке применяются для объединения частей выражения в одно целое, для обозначения порядка действий. Скобки бывают разные, в том числе круглые, квадратные, фигурные:

() [] { }

Круглые скобки появились в середине XVI в. в работе итальянского математика Н. Тартальи. Одновременно другой итальянец, Р. Больбелли, предложил прообраз квадратных скобок; в качестве начальной скобки он использовал букву L, а в качестве конечной — I, т. е. её же, но в перевернутом виде. Фигурные скобки в конце XVI в. ввёл Ф. Виет. Всё же большинство математиков того времени предпочитали выделять нужное выражение горизонтальной чертой. И. Ньютон использовал несколько горизонтальных чёрточек. Например:

$$y - 4xy + 5xy - 12xy + 1x$$

В общем употреблении скобки ввели лишь в первой половине XVIII в. Г. В. Лейбниц и Л. Эйлер.

РАСКРЫТИЕ СКОБОК

Из буквенных выражений с помощью знаков действий и скобок составляют другие буквенные выражения. Возьмём, например, выражения $2a$ и $3x - y$. Тогда

$2a + (3x - y)$ — сумма выражений $2a$ и $3x - y$;

$2a - (3x - y)$ — разность выражений $2a$ и $3x - y$;

$2a(3x - y)$ — произведение выражений $2a$ и $3x - y$.

Эти выражения записаны с помощью скобок, но каждое из них можно заменить равным выражением без скобок, или, как говорят, *раскрыть скобки*.

РАСКРЫТИЕ СКОБОК В СУММЕ И В РАЗНОСТИ Итак, требование «раскрыть скобки в выражении» означает, что его надо преобразовать в выражение, не содержащее скобки.

Сначала раскроем скобки в сумме $2a + (3x - y)$. Выражение $3x - y$, которое прибавляется к слагаемому $2a$, есть сумма выражений $3x$ и $-y$:

$$2a + (3x - y) = 2a + (3x + (-y)).$$

Вспомните, что согласно сочетательному закону сложения расстановка скобок в сумме на её значение не влияет, поэтому данную сумму можно записать без скобок:

$$2a + (3x + (-y)) = 2a + 3x + (-y) = 2a + 3x - y.$$

Таким образом,

$$2a + (3x - y) = 2a + 3x - y.$$

Полученное равенство подсказывает нам следующее правило:



Чтобы к некоторому выражению прибавить алгебраическую сумму, надо прибавить к этому выражению отдельно каждое слагаемое этой суммы.

Теперь раскроем скобки в разности $2a - (3x - y)$. Заменим вычитание сложением:

$$2a - (3x - y) = 2a + (-(3x - y)).$$

Далее воспользуемся законом, который выражается равенством $-a = -1 \cdot a$, а затем распределительным законом:

$$\begin{aligned} 2a + (-(3x - y)) &= 2a + ((-1) \cdot (3x - y)) = \\ &= 2a + (-3x + y). \end{aligned}$$

По правилу раскрытия скобок в сумме получим

$$2a + (-3x + y) = 2a - 3x + y.$$

Таким образом,

$$2a - (3x - y) = 2a - 3x + y.$$

Чтобы из некоторого выражения вычесть алгебраическую сумму, надо прибавить к нему отдельно каждое слагаемое этой суммы, взяв его с противоположным знаком.

Эти правила называют *правилами раскрытия скобок*, перед которыми стоит знак «+» или знак «-». Они позволяют выполнять рассмотренные преобразования короче.

Пример 1. Раскроем скобки в выражении

$$a - (a + b - c).$$

Перед скобками стоит знак «-». Поэтому, раскрывая скобки, прибавим к a слагаемые a , b и $-c$, взяв каждое из них с противоположным знаком:

$$a - (a + b - c) = a - a - b + c = 0 - b + c = c - b.$$

Пример 2. Раскроем скобки в выражении

$$-(x - y + z).$$

Запишем это выражение в виде разности:

$$0 - (x - y + z).$$

А теперь воспользуемся правилом раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «-»:

$$0 - (x - y + z) = 0 - x + y - z = -x + y - z = y - x - z.$$

Промежуточные шаги при выполнении подобного преобразования обычно пропускают и пишут так:

$$-(x - y + z) = -x + y - z = y - x - z.$$

ПРАВИЛА РАСКРЫТИЯ СКОБОК В ПРОИЗВЕДЕНИИ Раскрыть скобки в произведении $2a(3x - y)$ можно с помощью распределительного закона. Чтобы умножить $2a$ на сумму $3x$ и $-y$, нужно умножить $2a$ отдельно на каждое слагаемое этой суммы:

$$\begin{aligned} 2a(3x - y) &= 2a(3x + (-y)) = 2a \cdot 3x + 2a \cdot (-y) = \\ &= 6ax + (-2ay) = 6ax - 2ay. \end{aligned}$$

Такое преобразование обычно записывают короче:

$$2a(3x - y) = 6ax - 2ay.$$

Чтобы умножить некоторое выражение на алгебраическую сумму, нужно умножить это выражение отдельно на каждое слагаемое этой суммы и результаты сложить.

Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «-»

$$a - (b + c) = a - b - c$$

$$a - (b - c) = a - b + c$$

$$a - (-b + c) = a + b - c$$

$$a - (-b - c) = a + b + c$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Сформулируйте правила раскрытия скобок в сумме и в разности. Как называют эти правила? Проиллюстрируйте их на примере выражений $3x + (2y - z)$ и $3x - (2y - z)$.

Объясните, как раскрыть скобки в выражениях $+(x - y)$ и $-(x - y)$. Выполните эти преобразования.

На основании какого закона раскрывают скобки в произведении $3x(2y - z)$? Сформулируйте соответствующее правило и выполните преобразование.

Запишите выражение из «Математического блокнота» на с. 80, заменив горизонтальные чёрточки круглыми скобками, а знаки умножения — точками.

УПРАЖНЕНИЯ

РАСКРЫВАЕМ СКОБКИ, ПЕРЕД КОТОРЫМИ СТОИТ ЗНАК «+»
ИЛИ ЗНАК «-»

234 Раскройте скобки в сумме:

- а) $a + (b - c + d)$; в) $(a - b) + (c - d)$;
 б) $a + (b + c - d)$; г) $(t + s) + (-p - m)$.

Подсказка. В таких случаях, как в) и г), первое слагаемое, перед которым нет знака, записывают без скобок.

235 Раскройте скобки в разности:

- а) $a - (b - c - d)$; в) $(x + y) - (z + t)$;
 б) $a - (b + c + d)$; г) $(m - n) - (k - t)$.

236 Раскройте скобки и упростите получившееся выражение:

- а) $(x + y) + (y - x)$; г) $(a + c) - (a - c) - (c - a)$;
 б) $(a - b) - (a + b)$; д) $x - (x - y) - (y + z) - (-z - x)$;
 в) $m - (n - p - m)$; е) $c - (a - c) + (b - c) - (c - a)$.

237 Восстановите алгебраическую сумму в скобках:

- а) $x - (...) = x - a + b - c$; б) $x - y = (x - a) + (...)$.

238 1) Раскройте скобки в каждом из выражений:

- а) $-(a - b)$, $-(-a + b)$, $-(a + b)$, $-(-a - b)$;
 б) $-(x - y - z)$, $-(-x - y + z)$, $-(x + y - z)$.

2) Запишите, используя скобки, выражение, противоположное алгебраической сумме $a - b - c + d$, а потом раскройте скобки. Сделайте вывод о знаках слагаемых в противоположных суммах.

239 а) Чему равен периметр треугольника, одна сторона которого a см, вторая — на 1 см больше первой, а третья — на 2 см меньше второй?

б) На первой полке стоят x книг, на второй — на 3 книги больше, а на третьей — на 5 книг меньше, чем на первой. Сколько книг на трёх полках?

240 а) Два велосипедиста едут навстречу друг другу из пунктов A и B . Первый до встречи проехал l км, а второй — на m км больше. Чему равно расстояние между A и B ?

б) Турист идёт из одного посёлка в другой, расстояние между которыми s км. Пройдя x км, что составило большую часть пути, он сделал остановку. На сколько километров пройденное расстояние больше оставшегося?

241 Упростите выражение:

- а) $(ab - 1) - (ab + 1) - (a - b)$; б) $(m - mn) - (n - mn) + (m + n)$.

242 а) В выражении $a + b + c$ выполните подстановку $a = x - y$, $b = y - z$, $c = x + z$ и упростите полученное выражение.

б) В выражении $a - b - c$ выполните подстановку $a = x + y$, $b = y + z$, $c = x - z$ и упростите полученное выражение.

243

Раскройте скобки:

а) $a - (b - (c + 4))$;

в) $a - (a - (a - 10))$;

б) $x - (3 - (x + 6))$;

г) $c - (c - (c + d))$.

244

Используя скобки, представьте выражение $a - b - ab + 4$:а) в виде суммы двух слагаемых, первое из которых равно $a - ab$;б) в виде разности двух выражений с уменьшаемым, равным $a - ab$.

245

Проверьте на числовых примерах, а затем докажите, что:

а) сумма двух последовательных натуральных чисел есть число нечётное;

б) сумма двух последовательных нечётных чисел есть число чётное.

246

1) Запишите и упростите сумму трёх последовательных натуральных чисел.

2) Объясните, почему сумма трёх последовательных натуральных чисел делится на 3.

РАСКРЫВАЕМ СКОБКИ В ПРОИЗВЕДЕНИИ

247

Раскройте скобки в произведении:

а) $8(x + 3)$;

в) $-9(a - 4)$;

д) $12(a - b)$;

ж) $0,5(14 - m)$;

б) $2(a - 1)$;

г) $-7(b + 5)$;

е) $-3(x - y)$;

з) $-\frac{2}{3}(-n - 6)$.

248

Выполните умножение:

а) $a(b - x)$;

в) $(10 - a) \cdot 4$;

д) $y(x - y - z)$;

б) $x(x + y)$;

г) $(b - a) \cdot (-2)$;

е) $(a - m + n) \cdot (-m)$.

249

Раскройте скобки в произведении:

а) $\frac{1}{4}(4x - 16)$;

в) $(2x - 3y) \cdot (-3)$;

д) $2x(a + 3b - 8c)$;

б) $-\frac{1}{3}(3x - 12)$;

г) $-2m(5 - 4n)$;

е) $-7c(x - 2y + 3z)$.

250

Упростите:

а) $c(a + 1) - c$;

в) $m(1 + n) - (m - 1)$;

д) $(x - xy) + x(y + 1)$;

б) $\frac{1}{4}(8b - 2) - 1$;

г) $\frac{1}{3}(3k + 9) - k$;

е) $\frac{2}{3}(1,5a - 9) - a$.

251

Запишите выражения для вычисления площади фигуры (рис. 3.8) сначала сложением площадей прямоугольников, а затем вычитанием. Покажите, как можно получить второе выражение из первого с помощью преобразований.

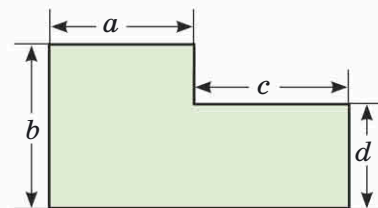


Рис. 3.8

Неверно!

Исправьте ошибки (если они есть):

1) $(3 - a) - (-a + 4) = -1$;

2) $(a - 6) - (a - 2) = -8$;

3) $10 - (a - 5) + (a - 5) = 0$.

3.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие слагаемые называют подобными.
- Что значит привести подобные слагаемые.
- Правило приведения подобных слагаемых.

Основные законы действий — переместительный, сочетательный, распределительный — имеют ещё и другие названия, которые используются обычно в научной литературе: *коммутативный* (от лат. *commutare* — менять, перемещать); *ассоциативный* (от лат. *associare* — присоединять); *дистрибутивный* (от англ. *distribute* — распределять).

Современные знаки арифметических действий стали общепринятыми лишь в конце XVII в. По одной из версий, знаки «+» и «-» появились в результате использования условных обозначений, которыми средневековые торговцы отмечали на ящиках с товаром его избыток или недостаток. В печати эти знаки впервые появились в 1489 г. в учебнике по арифметике уроженца Чехии Я. Видмана.

Знак умножения «×» был введён в 1631 г. англичанином В. Оутредом. А чтобы косой крест не путали с буквой *x*, немецкий математик Г. В. Лейбниц стал действие умножения обозначать точкой. Он же применил двоеточие для действия деления.

ПРИВЕДЕНИЕ ПОДОБНЫХ СЛАГАЕМЫХ

Пусть требуется найти значение суммы

$$15 \cdot 23 + 15 \cdot 12 + 15 \cdot 20.$$

Для этого можно вычислить каждое произведение и результаты сложить. Удобнее, однако, воспользоваться тем, что слагаемые имеют общий множитель 15. Этот множитель можно вынести за скобки. Получим

$$15 \cdot 23 + 15 \cdot 12 + 15 \cdot 20 = 15 \cdot (23 + 12 + 20) = 15 \cdot 55 = 825.$$

В результате выполненного преобразования нам удалось сумму, состоящую из трёх произведений, заменить «коротким» выражением $15 \cdot 55$, и вычисления оказались менее трудоёмкими.

Точно так же можно преобразовывать и суммы, являющиеся буквенными выражениями, например, такие, как

$$tx + ty + tz.$$

Каждое слагаемое этой суммы содержит множитель t , который можно вынести за скобки:

$$tx + ty + tz = t(x + y + z).$$

А право на такое преобразование нам даёт распределительный закон. Только в данном случае мы применяем его справа налево: заменяем сумму произведением, а не наоборот. На таком применении распределительного закона основан важный приём упрощения алгебраических сумм, который будет рассмотрен в этом пункте.

КАКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НАЗЫВАЮТ ПРИВЕДЕНИЕМ ПОДОБНЫХ СЛАГАЕМЫХ

Рассмотрим сумму

$$2a + 4a + 5b - 10a.$$

Слагаемые $2a$, $4a$ и $-10a$ имеют одну и ту же буквенную часть. Сгруппируем их:

$$2a + 4a + 5b - 10a = (2a + 4a - 10a) + 5b.$$

В сумме $2a + 4a - 10a$ вынесем за скобки общий множитель a и вычислим оставшуюся в скобках числовую сумму:

$$(2a + 4a - 10a) + 5b = a \cdot (2 + 4 - 10) + 5b = a \cdot (-4) + 5b = -4a + 5b.$$

Таким образом,

$$2a + 4a + 5b - 10a = -4a + 5b.$$

Нам удалось упростить рассматриваемое выражение, заменив сумму трёх слагаемых $2a$, $4a$ и $-10a$ одним выражением $-4a$.

Слагаемые, имеющие одну и ту же буквенную часть, называют **подобными слагаемыми**. Замену суммы подобных слагаемых одним выражением называют **приведением подобных слагаемых**.

ПРАВИЛО ПРИВЕДЕНИЯ ПОДОБНЫХ СЛАГАЕМЫХ Из рассмотренного примера приведения подобных слагаемых в выражении $2a + 4a + 5b - 10a$ понятно правило, которым удобно пользоваться на практике:

Чтобы привести подобные слагаемые, нужно:

- эти слагаемые сгруппировать;
- сложить их коэффициенты;
- умножить полученную сумму на их общую буквенную часть.

Пример. Упростим сумму

$$3ab + 6c - 2ab + ab - c.$$

В этой сумме две группы подобных слагаемых. У одних общей буквенной частью является произведение ab , у других — буква c . Сгруппируем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} 3ab + 6c - 2ab + ab - c &= \\ &= (3ab - 2ab + ab) + (6c - c). \end{aligned}$$

Найдём сумму коэффициентов подобных слагаемых первой группы: $3 - 2 + 1 = 2$. Значит, эту группу слагаемых надо заменить выражением $2ab$. Обратите внимание: коэффициент слагаемого ab равен 1, так как $ab = 1 \cdot ab$.

Теперь найдём сумму коэффициентов слагаемых второй группы: $6 - 1 = 5$. Значит, в результате приведения подобных слагаемых второй группы мы получим $5c$. Заметьте: коэффициент слагаемого $-c$ равен -1 , так как $-c = (-1) \cdot c$.

Таким образом,

$$3ab + 6c - 2ab + ab - c = 2ab + 5c.$$

Подобные слагаемые можно группировать мысленно, при этом удобно выделить их специальными знаками. Тогда решение записывается короче.

Например:

$$\underline{3ab} + \underline{6c} - \underline{2ab} + \underline{ab} - \underline{c} = 2ab + 5c.$$

Упростим выражение $a - \frac{a}{3}$:

$$a - \frac{a}{3} = a - \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a.$$

Задача. В ноябре холодильник стоил x р. В декабре его уценили на 10 %, а в январе на распродаже объявили скидку ещё на 30 %. На сколько процентов была в итоге снижена ноябрьская цена?

Решение.

1) Цена в декабре:

$$x - 0,1x = 0,9x \text{ (р.)}$$

2) В январе скидка составила

$$0,3 \cdot 0,9x = 0,27x \text{ (р.)}$$

3) Цена в январе:

$$0,9x - 0,27x = 0,63x \text{ (р.)}$$

4) Ноябрьская цена уменьшилась на

$$x - 0,63x = 0,37x \text{ (р.)}$$

Ответ: на 37 %.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Какие слагаемые называют подобными? Найдите подобные слагаемые в каждом из выражений:

$$4x + 4 - x + 0,2x;$$

$$2ab + 3ac - ab + ba.$$

● На каком законе основано приведение подобных слагаемых?

● Проиллюстрируйте правило приведения подобных слагаемых на примере выражения $7c - 2,5 - 1,5c$.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРИМЕНЯЕМ ПРАВИЛО ПРИВЕДЕНИЯ ПОДОБНЫХ СЛАГАЕМЫХ

Упростите выражение (№ 252–253):

252

а) $5a + 4a$;

в) $6y + 8 + 6y$;

д) $\frac{1}{3}c + \frac{1}{6}c + c$;

б) $7c + c$;

г) $1,5a + a + 2,5a$;

е) $n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4}$;

253

а) $18x - 3x + 5x$;

в) $2a - 15 - a + 6$;

д) $1,2x - 0,3x + 5$;

б) $2y - 9y - 10y$;

г) $5c - 5 + 3c - 4c$;

е) $a + 6,3a - 2,1a$.

254

Замените сумму одинаковых слагаемых одним выражением и найдите его значение при указанных значениях буквы:

а) $x + x + x + x$ при $x = -1,5$; 0; $\frac{5}{12}$;

б) $-a - a - a - a - a$ при $a = -1$; 0; 2,5;

в) $-2c - 2c - 2c$ при $c = -6$; 0; $\frac{2}{3}$;

г) $-\frac{n}{3} - \frac{n}{3} - \frac{n}{3} - \frac{n}{3}$ при $n = -1,5$; 0; 2,7.

255

Приведите подобные слагаемые:

а) $7a + 9b + 3b - 5a - 6b + b$;

в) $12m^2 - 10 - 15m^2 + 4m^2$;

б) $4m + n - 5m + 1 + 6n - 7n$;

г) $3y^2 - y + 4y^2 - 2y + 3y$.

256

Упростите:

а) $2ab - 3ba + 5a - a$;

г) $mn - m - n - 2n$;

б) $4xy + 7x - 5xy - 2x$;

д) $abc + bca + cab$;

в) $xy - x + y - yx$;

е) $xyz - yzx - xzy - zxy$.

257

Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях букв:

а) $3,7a - 2,5b - 7,5b + 0,3a + 10$ при $a = -1,5$, $b = 0,12$;

б) $-1,6x + 0,2y + 2,6x - 0,1 - 3,2y$ при $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$.

258

Ученик выполнял на доске два упражнения на приведение подобных слагаемых и затем стёр знаки между слагаемыми. Восстановите их.

1) $7a \square 5b \square 3a \square b \square 4b \square 4a = 10b$;

2) $7a \square 5b \square 3a \square b \square 4b \square 4a = 6a$.

259

Автомобиль проехал расстояние между городами за 5 ч, двигаясь со скоростью v км/ч. На сколько километров в час нужно увеличить скорость движения, чтобы затратить на этот путь на час меньше?



260

В центре городского района планировали разбить сквер прямоугольной формы размером $a \times b$ м. В процессе работ одну сторону увеличили на 50 %, а другую уменьшили на 20 %. Как изменилась площадь сквера — увеличилась или уменьшилась — и на сколько процентов?

ПРИМЕНЯЕМ ДВА ПРАВИЛА — РАСКРЫТИЯ СКОБОК И ПРИВЕДЕНИЯ ПОДОБНЫХ СЛАГАЕМЫХ

261

Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(2y + z) - (z - 2y)$;

г) $(a + b) - (a - b) - (b - a)$;

б) $(x + 3) - (5x - 7)$;

д) $3m - (2m - 3) + (2 - m)$;

в) $(2a - 1) + (3 - 4a)$;

е) $(3y - 1) - (2y - 2) + (y - 3)$.

262

Упростите выражение:

а) $2(a + 6) + 3(a + b) + 2a$;

г) $5n - 3(n + 2) + (n - 6)$;

б) $5(x - z) - 2(x + z)$;

д) $m - (2m - 6) + (m - 3)$;

в) $6(2a + c) + 2(6a - c) - 4c$;

е) $2(3x + 1) - (x - 2) - 3x$.

263

Упростите:

а) $b(m - 7) - 7b$;

в) $a(1 - b) - a(1 + b)$;

б) $x(c + 1) + c(x - 1)$;

г) $b(2d - 5) - b(d + 5)$.

264

Упростите выражение:

а) $a(b + 3) + b(a + 3) - 3(a + b)$;

б) $2(x - y) + 6(y - x) - (4x - 4y)$;

в) $a(b + c) - 6(a + b) - c(a + b)$;

г) $m(n - l) + n(l - m) + l(m - n)$.

265

В подставке на столе учителя находятся цветные карандаши — красные, синие и зелёные. Из них m карандашей красные, синих карандашей на 7 меньше, чем красных, а зелёных в 2 раза больше, чем синих. Сколько карандашей в подставке?

266

Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . Скорость первого пешехода a км/ч, скорость второго на 1 км/ч больше. Чему равно расстояние между A и B , если пешеходы встретились через 2 ч?



267

Расставьте скобки так, чтобы путём преобразования левой части равенства можно было получить правую часть:

а) $2k - a - k - a = k$;

в) $ab + 1 - ab + 1 = 0$;

б) $2k - a - k - a = k - a$;

г) $ab + 1 - ab + 1 = b + 1$.

268

Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

а) $4y - (3y - (2y + 1))$;

в) $3m - (3m + (3m - (m + 3)))$;

б) $a - (2x - (2a - x))$;

г) $b - (2c - (3b + (4c - 5b)))$.

269

Автомобиль находился в пути 5 ч. Из этого времени t ч он ехал по просёлочной дороге, остальное время — по шоссе. Какой путь проехал автомобиль, если по шоссе он ехал со скоростью a км/ч, а по просёлку со скоростью, на 40 км/ч меньшей?

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ЕЩЁ РАЗ О ЗАКОНАХ АЛГЕБРЫ

Правила преобразования буквенных выражений основаны на законах алгебры, а сами законы, в свою очередь, основываются на здравом смысле, точнее, на смысле действий над реальными величинами. Но, исходя из здравого смысла, можно, не прибегая к правилам, выполнять многие преобразования, например приведение подобных слагаемых.

Рассмотрим, к примеру, равенство $3x - 2x + 4x = 5x$. Его можно истолковать, или, как ещё говорят, интерпретировать, так: если из имеющихся трёх одинаковых предметов убрать два, а потом добавить четыре таких же, то в результате получится пять предметов. Примерно так при решении задач рассуждали математики ещё в Древней Греции.

Приведём другие, более сложные примеры.

Пример 1. Почему равны выражения $x - (y + z + t)$ и $x - y - z - t$?

Для ответа на этот вопрос будем использовать «язык денег». Допустим, у человека было x р., и он сделал три покупки стоимостью соответственно y , z и t р. Сколько у него осталось денег?

Для подсчёта искомого остатка есть два способа. Можно сначала найти общие затраты — они равны $y + z + t$ р., а затем найти остаток — он равен $x - (y + z + t)$ р. А можно считать последовательно: после первой покупки у него осталось $x - y$ р., после второй $x - y - z$ р., после третьей $x - y - z - t$ р. Но полученные при этих способах подсчёта остатки — это одна и та же сумма. Значит,

$$x - (y + z + t) = x - y - z - t.$$

Пример 2. Как обосновать равенство $x - (y - z) = x - y + z$?

Пусть человек, имеющий x р., хотел купить вещь стоимостью y р., но оказалось, что эта вещь стоит на z р. дешевле. Тогда после покупки у него осталось $x - (y - z)$ р. С другой стороны, человек предполагал, что у него останется $y - z$ р., но z р. он сэкономил, так что на самом деле у него осталось $x - y + z$ р. Поэтому $x - (y - z) = x - y + z$.

Разумеется, истолковать данное равенство можно не только на «языке денег». Например, здесь удобно воспользоваться и «языком расстояний».

Пусть туристу надо пройти x км. В первый день он намеревался пройти y км, но прошёл на z км меньше. Тогда после первого дня ему осталось пройти $x - (y - z)$ км. С другой стороны, он рассчитывал, что ему останется пройти $x - y$ км, а реально осталось пройти на z км больше, т. е. всего осталось пройти $x - y + z$ км. Так что $x - (y - z) = x - y + z$.

Пример 3. Покажем, что $(xy) : z = x(y : z)$.

Для равенств, связанных с умножением, часто удобна интерпретация на «языке площадей». Рассмотрим прямоугольник со сторонами x и y (рис. 3.9). Разделим его сторону длиной y на z равных частей и разрежем прямоугольник на полоски. Тогда площадь каждой полоски равна $x(y : z)$. Всего имеется z полосок равной площади, а их общая площадь равна xy , и поэтому площадь каждой полоски равна $(xy) : z$. Значит, $(xy) : z = x(y : z)$.

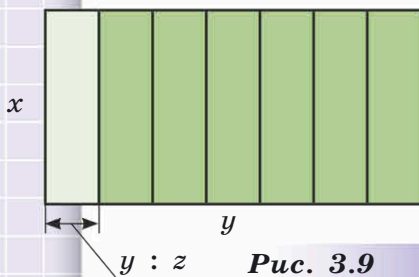


Рис. 3.9

Однако опоры на реальный смысл арифметических действий, вообще говоря, недостаточно. Хотя бы потому, что при этом мы всегда рассматриваем только положительные числа, а часто даже и натуральные. С точки зрения математики алгебраические преобразования, которые мы выполняем, нуждаются в более строгом обосновании.

Пример 4. Мы постоянно пользуемся равенством $x - y = x + (-y)$. Докажем, что оно верно.

Воспользуемся определением разности: число c называют разностью чисел a и b , если $b + c = a$. В соответствии с этим определением надо проверить, что $(x + (-y)) + y = x$. Действительно,

$$(x + (-y)) + y = x + ((-y) + y) = x + 0 = x.$$

Пример 5. Докажем, что верно равенство $(-x)y = -xy$.

Фактически перед нами стоит задача: доказать, что произведение $(-x)y$ есть число, противоположное числу xy , т. е. что $(-x)y + xy = 0$.

Воспользуемся распределительным законом. Получим

$$(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0y = 0.$$

Пример 6. Докажем, что $x + (y + (z + t)) = x + y + z + t$.

Мы давно разрешили себе специальным правилом, вытекающим из сочетательного закона сложения, писать все суммы без скобок. В действительности, однако, надо доказать, что, применяя это правило, мы всегда будем получать верные равенства. А данный пример является одним из частных случаев для его обоснования.

Вспомним, что сумма $x + y + z + t$ вычисляется слева направо, т. е. если восстановить в этой сумме скобки, то получится равенство

$$x + y + z + t = ((x + y) + z) + t.$$

Поэтому, по сути, мы должны доказать, что

$$x + (y + (z + t)) = ((x + y) + z) + t.$$

Действительно,

$$x + (y + (z + t)) = (x + y) + (z + t) = ((x + y) + z) + t.$$

Мы дважды воспользовались сочетательным законом: в первый раз мы применили его для чисел x , y и $z + t$, а во второй раз — для чисел $x + y$, z и t .

1 Дайте истолкование на «языке площадей» равенства $(x - y)z = xz - yz$.

2 Предложите какую-нибудь интерпретацию данного равенства на «языке денег» или на «языке расстояний»:

а) $x - (y - z + t) = x - y + z - t$; б) $(x + z) - (y + z) = x - y$.

3 Как можно истолковать на «языке объёмов» равенство $(xy)z = x(yz)$?

4 С помощью какого-либо «языка» дайте истолкование равенства $x : (yz) = (x : y) : z$.

5 Перемножить непосредственно можно только два числа. Поэтому для вычисления произведения $x y z$ в нём надо (хотя бы мысленно) поставить скобки. Это можно сделать двумя способами: представить его как $(xy)z$ или как $x(yz)$. А сколькими способами можно поставить скобки в выражении $x y z t$? Докажите, что при этом каждый раз будут получаться равные выражения.

6 Докажите, что верно равенство $x + (y + (z + (t + u))) = x + y + z + t + u$.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Преобразовать буквенное выражение — это значит заменить его другим выражением, принимающим при любых значениях букв, допустимых для каждого из них, те же значения, что и исходное. Исходное и преобразованное выражения называют *тождественно равными выражениями* или просто *равными*.

$a(b + c)$ и $ab + ac$,
 $a - (b + c)$ и $a - b - c$,
 $\frac{a+b}{c}$ и $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ —
 равные выражения

Правила преобразования сумм и произведений:

- в любой сумме слагаемые можно как угодно переставлять и объединять в группы;
- в любом произведении множители можно как угодно переставлять и объединять в группы.

$$-a + 5 + b = \\ = b - a + 5$$

$$ab \cdot (-3c) = -3abc$$

Правила раскрытия скобок:

- чтобы к некоторому выражению прибавить алгебраическую сумму, надо прибавить к нему отдельно каждое слагаемое этой суммы;
- чтобы из некоторого выражения вычесть алгебраическую сумму, надо прибавить к нему отдельно каждое слагаемое этой суммы, взяв его с противоположным знаком;
- чтобы некоторое выражение умножить на алгебраическую сумму, нужно умножить это выражение отдельно на каждое слагаемое и результаты сложить.

$$a + (b - c + a) = \\ = a + b - c + a = \\ = 2a + b - c \\ a - (b - c + a) = \\ = a - b + c - a = \\ = c - b$$

$$3c(2a - 5) = \\ = 3c \cdot 2a - 3c \cdot 5 = \\ = 6ac - 15c$$

Правило приведения подобных слагаемых:

Слагаемые, имеющие одну и ту же буквенную часть, называют *подобными слагаемыми*.

Чтобы привести подобные слагаемые, нужно:

- 1) сложить их коэффициенты;
- 2) умножить сумму на общую буквенную часть.

$$\begin{array}{r} 4a + \underline{b} - 5a + 1 + \underline{3b} = \\ \quad \quad \quad -a \quad \quad \quad 4b \\ = -a + 4b + 1 \end{array}$$

- 1 Упростите выражение:
 а) $y \cdot (-2a)(-3b)$; б) $2xy \cdot 7xz$; в) $5ab \cdot (-0,2b)$.

- 2 Приведите подобные слагаемые:
 а) $3x - x + 7x - 3x$; б) $2b - a + 4b - 7a + 7$.

- 3 Составьте выражение по условию задачи и упростите его:
 а) В одном ведре x л воды, в другом — на 3 л больше, а в третьем — на 4 л меньше, чем в первом. Сколько литров воды в трёх ведах?
 б) Одна сторона прямоугольника a см, а другая — на m см больше. Чему равен периметр прямоугольника?

- 4 Найдите значение выражения $2a + 3 - 1,5a + 0,5$ при $a = -3$; 0; 4.

- 5 Упростите выражение: а) $4a + (a + b) - (2a + 3b)$; б) $2(x + 3y) - (3x - y)$.

ГЛАВА 4

УРАВНЕНИЯ

- УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ
- РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Узнайте больше

- НЕКОТОРЫЕ НЕАЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ



ИНТЕРЕСНО

Однажды в III веке до н. э. Архимед послал Эратосфену эпиграмму, в которой просил его определить, сколь велики стада бога Солнца Гелиоса, указав несколько исходных чисел. Для решения этой задачи нужно решить очень сложное уравнение. Решением задачи является число 5916837175686.

4.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём заключается алгебраический способ решения задач.
- Что такое корень уравнения.
- Что значит решить уравнение.



Алгебраический способ решения задач:

- 1-й шаг — введение буквы;
- 2-й шаг — составление уравнения;
- 3-й шаг — решение уравнения и ответ на вопрос задачи.

УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ

Вы уже решали немало задач с помощью рассуждений и, конечно, поняли, что к каждой задаче надо подбирать свой особый ключик. Алгебра предлагает нам новые возможности. Оказывается, с помощью одного и того же общего приёма можно решать самые разные, совсем не похожие одна на другую задачи.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ Когда задачу решают *алгебраическим способом*, то прежде всего условие задачи переводят на язык математики. Основа такого перевода, его 1-й шаг — введение буквы для обозначения какой-либо неизвестной величины. В результате перевода обычно получается равенство, содержащее букву. Это равенство, как вы уже знаете, называют **уравнением**.

Задача. В семье две пары близнецов, родившихся с разницей в 3 года. В 2012 г. всем вместе исполнилось 50 лет. Сколько лет было каждому из близнецов в 2010 г.?

Обозначим через x возраст младших близнецов в 2010 г. Тогда старшим близнецам в этом году было $x + 3$ года. В 2012 г., т. е. через 2 года, младшим близнецам было по $x + 2$ года, а старшим — по $x + 5$ лет.

По условию задачи суммарный возраст близнецов в 2012 г. составил 50 лет. Значит,

$$(x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) = 50.$$

Таким образом, уравнение составлено. Теперь, чтобы найти неизвестное число x , это уравнение надо решить.

Сначала упростим его левую часть. Получим

$$x + 2 + x + 2 + x + 5 + x + 5 = 50,$$

$$4x + 14 = 50.$$

Найдём из этого уравнения слагаемое $4x$:

$$4x = 50 - 14,$$

$$4x = 36.$$

Теперь остаётся найти неизвестный множитель x :

$$x = 36 : 4 = 9.$$

Итак, мы нашли неизвестное число, которое обозначили буквой x . Однако это ещё не ответ задачи. Буквой x был обозначен возраст младшей пары близнецов: значит, им в 2010 г. было по 9 лет. Но ещё нужно найти возраст старшей пары близнецов. Так как старшим близнецам на 3 года больше, то им было по 12 лет.

Попробуйте решить эту задачу арифметически. Вы сможете убедиться, что это не так уж и просто и что алгебраический способ, безусловно, легче.

КОРНИ УРАВНЕНИЯ Уравнения в математике рассматривают не только в связи с текстовыми задачами. Всякое равенство, содержащее переменную, можно рассматривать как уравнение. Например, равенства

$x^2 + 4x = 3$, $3(2 - y) - 8 = 7 + 2y$, $1 - a^3 = 7$ — это уравнения.

Напротив, числовые равенства $2 + 2 = 4$, $5 \cdot 7 = 35$ уравнениями не являются — в них нет переменной. И выражения $x^2 + 5x + 7$, $5(3 - 2c) - 5c$ тоже, конечно, уравнениями не являются, потому что они не являются равенствами.

Уравнения характеризуются двумя очевидными свойствами, легко определяемыми на глаз: во-первых, уравнение — это равенство; во-вторых, в этом равенстве имеется буква — в одной из его частей или в обеих.

Если в уравнение вместо переменной подставить число, то получится числовое равенство. Числовое равенство, как известно, может быть верным или неверным. Решение уравнения — это поиск тех значений переменной, при которых получается верное равенство. Такие значения переменной, как вы знаете, называют *корнями уравнения*.

Известно, что впервые применил букву для обозначения неизвестной величины Диофант Александрийский — древнегреческий математик, живший в III в. Это был очень важный шаг в создании символического языка математики. Но только в XVII–XVIII вв. использование буквы для обозначения неизвестных стало общепринятым.

Корнем уравнения называется число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Уравнение $(x + 2) + (x + 2) + (x + 5) + (x + 5) = 50$, которое мы решали выше, имеет только один корень — число 9.

Но уравнение может иметь и более одного корня. Например, у уравнения $x^2 = 9$ два корня — это числа -3 и 3 .

Вообще уравнение может иметь сколько угодно корней, их даже может быть бесконечно много. Например, корнем уравнения $2(x + 3) = 2x + 6$, в обеих частях которого стоят равные выражения, является любое число. Действительно, какое бы число мы ни подставили в это уравнение вместо переменной x , получится верное числовое равенство.

А вот уравнение $x + 1 = x + 3$ вообще не имеет корней, так как при любом значении x левая часть уравнения на 2 меньше его правой части.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Можно сказать и так:

решить уравнение — значит найти множество его корней. (Вспомните, что множество может быть и пустым.)

Русское слово «корень» в словосочетании «корень уравнения» — это яркий пример метафоры в математическом языке: вспомните, как при решении текстовой задачи алгебраическим способом уравнение как бы вырастает из неизвестного числа x .

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Составьте уравнение по условию задачи.

В двух пачках вместе 350 листов бумаги. Сколько бумаги в каждой пачке, если известно, что в одной из них листов в 4 раза больше, чем в другой?

Что называется корнем уравнения?

Является ли число -3 корнем уравнения: а) $x^2 + x - 6 = 0$;

б) $x^3 = 27$?

УПРАЖНЕНИЯ

СОСТАВЛЯЕМ УРАВНЕНИЯ

Составьте разные уравнения по условию задачи, обозначая буквой различные величины (№ 270–271):

270

В двух вагонах поезда 86 человек, причём в первом на 14 человек меньше, чем во втором. Сколько человек в каждом вагоне?

271

В июле число отдыхающих в пансионате возросло по сравнению с числом отдыхающих в июне в 2,5 раза. Сколько отдыхающих было в июне и сколько в июле, если всего за эти два месяца отдохнуло 4550 человек?

272

Прочитайте задачу:

В трёх корзинах 23 кг слив. Во второй корзине слив в 1,5 раза больше, чем в первой, а в третьей — на 2 кг больше, чем в первой. Сколько слив в каждой корзине? Выберите равенство, которое является переводом условия этой задачи на математический язык. (Буквой x обозначена масса слив в первой корзине.)

- 1) $x + 1,5x + 2x = 23$;
- 2) $x + (x + 1,5) + (x + 2) = 23$;
- 3) $x + 1,5x + (x + 2) = 23$.

273

Придумайте задачу, переводом которой на язык математики является уравнение:

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------|
| а) $x + (x - 3) = 33$; | в) $x + 3x = 160$; |
| б) $x + (x + 3) + (x + 6) = 30$; | г) $x + 2x + 3x = 60$. |

274

Составьте уравнение по условию задачи, опираясь на приведённый ниже план. На одной овощной базе 500 т картофеля, а на другой — 700 т. Ежедневно с первой базы отправляют в овощные магазины 20 ц картофеля, а со второй — 30 ц. Через сколько дней картофеля на овощных базах окажется поровну?

План составления уравнения.

- 1) Выразите данные величины в одних и тех же единицах.
- 2) Обозначьте искомое количество дней буквой x .
- 3) Запишите выражения, показывающие, сколько картофеля:
 - отправлено с первой овощной базы за x дней;
 - отправлено со второй овощной базы за x дней;
 - осталось на первой овощной базе через x дней;
 - осталось на второй овощной базе через x дней.
- 4) Запишите уравнение.

275

Составьте уравнение по условию задачи. (Действуйте по плану, аналогичному плану предыдущей задачи.)

В одной машине 3 т яблок, а в другой — 5 т яблок. Из первой машины выгрузили несколько ящиков по 15 кг в каждом, а из второй — в 2 раза больше ящиков по 20 кг в каждом. После этого в первой машине осталось столько же килограммов яблок, сколько во второй. Сколько ящиков выгрузили из каждой машины?

276

1) Запишите на языке уравнений условие задачи:

Задумали число. К нему прибавили 11, затем сумму поделили пополам и получили число, которое на 2 больше задуманного. Какое число было задумано?

2) Восстановите условие задачи на задуманное число по следующему уравнению (буквой обозначено задуманное число): $8(x - 1) = 6x$.

277

Составьте разные уравнения по условию задачи: Пётр заметил, что в этом году он младше отца в 3 раза, отец младше деда в 2 раза, а сумма его возраста, возраста отца и возраста деда составляет 110 лет. Сколько лет каждому?

278

Старинная задача: В клетке находятся фазаны и кролики. Известно, что у них 35 голов и 94 ноги. Узнайте число фазанов и число кроликов.

Составьте разные уравнения по условию задачи, обозначив буквой:

а) число фазанов; б) число кроликов; в) число ног у фазанов; г) число ног у кроликов.

КОРНИ УРАВНЕНИЯ

279

Докажите, что:

число 4 является корнем уравнения $2x - 7 = 5 - x$;

число -2 не является корнем уравнения $x(x + 3) = 10$, число 2 является его корнем;

число 4 является корнем уравнения $\frac{x}{2} - \frac{x}{4} = 1$;

число 0 не является корнем уравнения $x - 2(5x - 1) = 10x$.

280

Является ли корнем уравнения $2x^2 - 5x - 3 = 0$ число: 3; -4 ; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$?

281

Какие из чисел 1, 2, 0, -1 , -2 являются корнями уравнения:

а) $x^3 + 6x^2 + 5x - 6 = 0$; в) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = 0$;

б) $x^3 - x^2 - 6x = 0$; г) $x^3 + 4x^2 + x - 6 = 0$?

282

Решите уравнение:

а) $x^2 = 25$; б) $x^2 = 0$; в) $x^2 = -1$; г) $x^2 - 16 = 0$.

283

Докажите, что:

а) корнем уравнения $3x - 6 = 3(x - 2)$ является любое число;

б) уравнение $3y - 5 = 1 + 3y$ не имеет корней.

284

Решите уравнение:

а) $|x| = 5$; б) $|x| = 0$; в) $|x| = -5$; г) $|x| - 10 = 0$.

285

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Проверьте, что число 10 является корнем уравнения $|x| = x$, а число -10 его корнем не является. Выясните, какие из чисел 70 ; $\frac{1}{3}$; $52,4$; 0 ; -100 ; $-0,35$ являются корнями уравнения $|x| = x$. Объясните, почему никакое отрицательное число не является корнем этого уравнения. Приведите свои примеры чисел, являющихся корнями уравнения $|x| = x$, и чисел, не являющихся корнями этого уравнения.

2) Опишите словами множество корней уравнения $|x| = x$.

3) Проведите аналогичный эксперимент с уравнением $|x| = -x$. Опишите словами множество корней уравнения $|x| = -x$.

4.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Правила преобразования уравнений.
- Какое уравнение называется линейным уравнением.

Свойства числовых равенств

- Если $a = b$, то $a + c = b + c$ и $a - c = b - c$.
- Если $a = b$, то $ac = bc$ и $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ ($c \neq 0$).

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

До сих пор вы решали уравнения, используя приём нахождения неизвестного компонента арифметического действия. Для этого вам надо было знать много разных правил — нахождения слагаемого, уменьшаемого и др. и в каждом случае надо было понять, что вам надо находить. Однако далеко не каждое уравнение можно решить таким приёмом. Алгебра даёт нам другие возможности решения уравнения. В этом пункте вы познакомитесь с новыми общими приёмами, используемыми для решения уравнений.

ПРАВИЛА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ Чтобы решить уравнение, мы будем преобразовывать его в другое уравнение более простого вида, которое имеет то же множество корней, что и исходное. Правила преобразования уравнений являются следствиями очевидных свойств числовых равенств.

Числовое равенство не нарушится, если:

- к обеим его частям прибавить (от обеих его частей отнять) одно и то же число;
- обе его части умножить (разделить) на одно и то же число, отличное от нуля.

Рассмотрим два основных правила преобразования уравнений на примере решения уравнения $2x = 10 - 3x$.

К обеим частям уравнения $2x = 10 - 3x$ прибавим $3x$:	$2x + 3x = 10 - 3x + 3x$
Заменим сумму $-3x + 3x$ нулём:	$2x + 3x = 10$
Упростим левую часть уравнения:	$5x = 10$
Разделим обе части на 5:	$x = 2$

Сравните исходное уравнение $2x = 10 - 3x$ с уравнением $2x + 3x = 10$, записанным во второй строке. Вы видите, что в результате проведённого преобразования слагаемое $-3x$ оказалось в другой части уравнения, при этом его знак изменился с «минуса» на «плюс».

Иными словами, мы могли бы не прибавлять к обеим частям $3x$, а сразу перенести $-3x$ в левую часть с заменой знака.

Сформулируем правила преобразования уравнений.

- 1) В уравнении можно переносить слагаемое из одной части в другую, меняя при этом его знак на противоположный;
- 2) обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, отличное от нуля.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Пример 1. Решим уравнение $\frac{1}{3}x - 1 = 4$.

Воспользовавшись первым правилом, соберём числа в правой части уравнения. Получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}x &= 4 + 1, \\ \frac{1}{3}x &= 5.\end{aligned}$$

Воспользовавшись вторым правилом, умножим обе части уравнения на 3:

$$\begin{aligned}3 \cdot \frac{1}{3}x &= 3 \cdot 5, \\ x &= 15.\end{aligned}$$

Ответ: 15.

Пример 2. Решим уравнение $3x - 5 = x + 1$.

Соберём члены уравнения, содержащие переменную, в одной части, а числа в другой:

$$\begin{aligned}3x - x &= 1 + 5, \\ 2x &= 6.\end{aligned}$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$x = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 3. Решим уравнение $\frac{x}{4} = 1 + \frac{2x}{3}$.

Вычисление с целыми числами проще, чем с дробями, поэтому прежде всего избавимся от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на 12. Получим

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} \cdot 12 &= 12 + \frac{2x}{3} \cdot 12, \\ 3x &= 12 + 8x, \\ x &= -2,4.\end{aligned}$$

Ответ: -2,4.

ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ Каждое из уравнений, которые мы решали, в результате преобразований приводилось к виду $ax = b$. (Вернитесь к примерам: у нас получались уравнения $\frac{1}{3}x = 5$, $2x = 6$, $-5x = 12$.)



Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная, называют **линейным**.

Уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет единственный корень: $x = \frac{b}{a}$.

При $a = 0$ и $b = 0$ уравнение принимает вид $0x = 0$, его корнем является любое число.

При $a = 0$ и $b \neq 0$, например, как в уравнении $0x = 5$, уравнение корней не имеет.

Для Мухаммеда аль-Хорезми алгебра — это искусство решения уравнений, необходимое людям во всех их деловых взаимоотношениях. Его знаменитый трактат, созданный в 830 г., был составлен как руководство для решения практических задач.

Аль-Хорезми решает уравнения с помощью двух приёмов — аль-джебр и аль-мукабала. Аль-джебр (восстановление) состоял в переносе вычитаемых из одной части уравнения в другую с противоположными знаками. В результате «абсурдные» отрицательные числа превращались в противоположные, «настоящие», и это как бы восстанавливало их. Аль-мукабала (противопоставление) заключается в отбрасывании в обеих частях уравнения одинаковых членов; с точки зрения математики это операция приведения подобных членов.



Памятник Мухаммеду аль-Хорезми. Хива (Узбекистан). Скульптор С. Бабаян

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Какое правило преобразования уравнения надо использовать для решения уравнения:

- а) $8 + x = -17$; в) $-15x = 90$;
б) $x - 7 = 9$; г) $\frac{1}{3}x = 2$?

Решите уравнение и прокомментируйте каждый шаг:

- а) $5x - 11 = 2x + 1$;
б) $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

Решите уравнение и прокомментируйте, каким правилом преобразования уравнения вы воспользовались (№ 286–288):

286

- а) $x + 15 = 33$; в) $y - 8 = 15$; д) $x + 3 = 0$; ж) $-3 - z = 11$;
б) $-4 + z = 29$; г) $12 - x = 40$; е) $y - 16 = -5$; з) $x - 7 = 0$.

287

- а) $10x = 17$; д) $-x = -5$;
б) $5y = -8$; е) $12y = 0$;
в) $-2z = 6$; ж) $4z = -1$;
г) $-8x = -2$; з) $-7y = 7$.



Если $ax = b$, $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$.

288

- а) $3x = 1,2$; в) $-5z = 10,5$; д) $-0,1x = -4$; ж) $-2,5z = 2,5$;
б) $2y = \frac{4}{7}$; г) $\frac{1}{3}x = -3$; е) $-\frac{2}{5}y = 1$; з) $-6y = -\frac{2}{3}$.

289

Придумайте несколько уравнений, корнем каждого из которых является число:
а) 6; б) -10; в) 0; г) $-\frac{1}{3}$.

290

Запишите вместо c такое число, чтобы корнем получившегося уравнения было целое число:

- а) $\frac{1}{8}x = c$; б) $0,1x = c$; в) $cx = 15$; г) $cx = \frac{1}{3}$.

РЕШАЕМ УРАВНЕНИЯ

Найдите корень уравнения (№ 291–293):

291

- а) $15 + 3x = 36$; в) $1,5y - 3 = 3$; д) $31 - 2y = 17$; ж) $27 = 6y + 39$;
б) $\frac{1}{2}x + 9 = 17$; г) $5 - 0,2x = 1$; е) $3 + 0,1x = -4$; з) $0,4 = 1 - 1,2x$.

292

- а) $3x + 2x + 4 = 14$; в) $8y - 4y - 12 = -50$; д) $10z - 3z - 9 = 40$;
б) $7z - z + 5 = 11$; г) $-10 + x + x = -26$; е) $-y + 8 - 14y = 23$.

293

- а) $3x = 6 + 2x$; в) $3x - 16 = 7x$; д) $4 + 2,6x = 3x$; ж) $0,5x = 3x - 15$;
б) $6x = 4x + 10$; г) $9 + y = 4y$; е) $2,5x - 1 = 0,5x$; з) $1,9x = 7 + 2x$.

Решите уравнение (№ 294–297):

294

- а) $x + 2 = 4 - x$; г) $3 + 2y = 3y - 7$; ж) $10y + 7 = 2y - 9$;
б) $3x + 1 = 2x - 3$; д) $9x - 2 = 5x - 2$; з) $8 + 2x = 16 + x$;
в) $2x - 3 = 2 - 3x$; е) $10 - 3x = 2x - 15$; и) $4y - 8 = 5y - 3$.

295

- а) $5x + (9 + 8x) = 100$; г) $(y - 2) + (y - 1) + y = -3$;
б) $x - (50 - x) = 12$; д) $(18 - 3x) - (4 + 2x) = -6$;
в) $x + (x + 1) + (x + 2) = 9$; е) $21 + (20 - z) - (11 - 2z) = 0$.

296

а) $4(x - 7) = 3x + 5$;

г) $2x - 3(7 - 2x) = 3$;

б) $-5x + 3(3 + 2x) = 7$;

д) $12 - z = 5(4 - 2z) + 10$;

в) $30 - y = 3(20 - y)$;

е) $2 - 2(x - 8) = 4x$.

297

а) $\frac{x}{3} + 8 = \frac{2x}{3}$;

в) $\frac{x}{3} + \frac{x}{6} = 1$;

д) $\frac{y}{2} + 5 = \frac{y}{7}$;

ж) $\frac{z}{3} = \frac{z}{2} - 7$;

б) $\frac{3y}{2} + 5 = \frac{y}{2}$;

г) $\frac{z}{8} + \frac{z}{4} = 3$;

е) $\frac{x}{5} + 4 = \frac{x}{3}$;

з) $\frac{x}{5} = \frac{x}{10} + 1$.

Подсказка. В качестве образца воспользуйтесь примером 3.

298

Найдите значение переменной, при котором:

а) значение выражения $8x + 3$ на 10 больше значения выражения $4 - 2x$;

б) значение выражения $15 - 3x$ на 2 меньше значения выражения $2x + 3$.

299

Уравнение $6x = 2(x + 12)$ решить проще, если разделить обе его части на 2:

$$3x = x + 12,$$

$$2x = 12,$$

$$x = 6.$$

Решите уравнение, воспользовавшись разобранным способом:

а) $5(x + 5) = 80$;

в) $6(x - 1) + 3(5 - x) = 9$;

б) $-2(x + 12) = 6x$;

г) $4(3x - 2) = 2 - 4(x - 2)$.

300

Уравнение $\frac{1}{3}(x + 8) = 6$ можно решить, умножив на 3 обе его части:

$$3 \cdot \frac{1}{3}(x + 8) = 6 \cdot 3, \quad x + 8 = 18, \quad x = 10.$$

Решите уравнение, воспользовавшись разобранным способом:

а) $\frac{1}{5}(x + 4) = 3$;

в) $2x = 1\frac{1}{3}(x + 5)$;

б) $-\frac{1}{7}(5x - 7) = 6$;

г) $1\frac{1}{4}(x - 2) = -5(x + 1)$.

301

В древнегреческом папирусе содержится решение уравнения, которое на языке современной математики можно записать так:

$$\left(\left(x + \frac{2}{3}x \right) + \frac{1}{3} \left(x + \frac{2}{3}x \right) \right) \cdot \frac{1}{3} = 10.$$

Решите это уравнение.

302

Решите уравнение относительно x :

а) $x - a = 2$;

в) $1 - x = c + 2$;

д) $2x - a = b + x$;

б) $a - x = b$;

г) $3x + m = 0$;

е) $c - 3x = 4 - 5x$.

Образец. Решим уравнение $3a + 2x = 1$. Буквой a обозначено некоторое число. При решении уравнения пользуемся теми же правилами:

$$2x = 1 - 3a,$$

$$x = \frac{1 - 3a}{2}.$$

303

Выразите из равенства каждую переменную через другие:

а) $a + 2b - c = 0$;

в) $\frac{1}{3}(a + b + c) = 1$;

б) $m + n - 2c = 1$;

г) $2(x + y) = 4z$.

4.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как умение решать уравнения применяется в ходе решения задач.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Вы, конечно, заметили, что перевести условие задачи на язык математики можно по-разному, а поэтому и уравнения для решения одной и той же задачи могут получиться разные. Как правило, лучше сделать наиболее простой перевод.

СОСТАВЛЯЕМ РАЗНЫЕ УРАВНЕНИЯ Составить по условию задачи наиболее простое уравнение помогают некоторые практические правила.

Задача 1. Виктор доехал на велосипеде от деревни до реки и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От деревни до реки он ехал со скоростью 10 км/ч, а на обратном пути его скорость была 15 км/ч. Чему равно расстояние от деревни до реки?

Какую величину здесь целесообразно обозначить буквой x ? Часто в качестве неизвестного выбирают искомую величину, т. е. то, что требуется найти в задаче. Это можно сделать и в данном случае. Однако если через x (км) обозначить расстояние от деревни до реки, то получится уравнение

$$\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = 1,$$

и дальше при решении этого уравнения придётся иметь дело не с целыми числами, а с дробями.

Но в качестве неизвестного совсем не обязательно выбирать именно то, что требуется найти в задаче. Поэтому, руководствуясь неформальным, но мудрым правилом «целое лучше дроби», обозначим через x (ч) время, которое затратил Виктор на путь от деревни до реки.

Выразим через x другие величины.

От деревни до реки велосипедист ехал со скоростью 10 км/ч, т. е. он проехал $10x$ км.

На обратный путь велосипедист затратил $(1 - x)$ ч.

От реки до деревни велосипедист ехал со скоростью 15 км/ч, т. е. он проехал $15(1 - x)$ км.

Имеем уравнение $10x = 15(1 - x)$.

Решив его, получим $x = 0,6$.

Теперь найдём расстояние от деревни до реки:

$$10 \cdot 0,6 = 6 \text{ (км)}.$$

Ответ: 6 км.

Задача 2. На двух складах было 1840 т угля. Затем на первом складе запас угля удвоили, а на второй привезли ещё 120 т, и тогда на втором складе стало на 620 т угля меньше, чем на первом. Сколько стало угля на каждом складе?

Уже на этапе составления уравнения можно выбрать такое, которое проще решать.

Обозначим через x исходное количество угля (в тоннах) на первом складе, а не то, которое требуется найти в задаче (пользуемся правилом «целое лучше дроби»).

Выразим через x другие величины.

На первом складе запас угля удвоили, т. е. там стало $2x$ т угля.

По условию на втором складе было $(1840 - x)$ т угля, а затем стало $(1840 - x) + 120$ т.

Известно, что на втором складе угля стало на 620 т меньше, чем на первом.

Составим уравнение:

$$2x - ((1840 - x) + 120) = 620.$$

Решив уравнение, получим $x = 860$. Чтобы ответить на вопрос задачи, надо вернуться к её условию.

Ответ: на первом складе стало $860 \cdot 2 = 1720$ т угля, а на втором складе $1720 - 620 = 1100$ т угля.

Уравнение можно было составить по-другому, используя тот факт, что на первом складе угля стало на 620 т больше, чем на втором:

$$2x = ((1840 - x) + 120) + 620.$$

При этом мы следовали бы другому мудрому правилу: «плюс лучше минуса» (для преобразования составленного уравнения не потребуется раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «минус»).

АРИФМЕТИЧЕСКИЙ ИЛИ АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ?

Многие задачи можно решать и арифметическим, и алгебраическим способами. И в каждом конкретном случае вы можете применить тот, который вам представляется более простым.

Задача 3. Старинная задача. Трое выиграли некоторую сумму денег. На долю первого пришлась $\frac{1}{4}$ этой суммы, на долю второго — $\frac{1}{7}$, а на долю третьего — 17 флоринов. Как велик весь выигрыш?

Решение арифметическим способом

1) $1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{7}\right) = \frac{17}{28}$ — доля выигрыша третьего игрока;

2) $17 : \frac{17}{28} = 28$ (флоринов) — весь выигрыш.

Решение алгебраическим способом

Обозначим весь выигрыш буквой x . Выразим через x выигрыш первого игрока — это $\frac{1}{4}x$ флоринов, выигрыш второго игрока — это $\frac{1}{7}x$ флоринов. Тогда выигрыш третьего игрока — это $x - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x\right)$ флоринов. Значит, $x - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x\right) = 17$.

Решив уравнение, получим $x = 28$.

Ответ: 28 флоринов.



Задача. В папке для оригами 27 листов бумаги красного, зелёного и жёлтого цвета. Красной бумаги на 5 листов больше, чем зелёной, а жёлтой в 2 раза больше, чем красной. Сколько в папке листов жёлтой бумаги?

Решение.

Пусть в папке x листов красной бумаги, тогда зелёной $x - 5$ листов, а жёлтой $2x$ листов. Всего 27 листов.

$$x + x - 5 + 2x = 27;$$

$$x + x + 2x = 27 + 5;$$

$$4x = 32;$$

$$x = 8.$$

В папке 8 листов красной бумаги, а жёлтой в 2 раза больше.

Ответ: 16 листов жёлтой бумаги.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● По условию задачи 1 составьте другое уравнение, обозначив буквой x время, которое затратил велосипедист на обратный путь.

● По условию задачи 2 составьте другое уравнение, обозначив буквой x исходное количество угля на втором складе.

УПРАЖНЕНИЯ

Решите задачу, обозначив буквой наименьшую из неизвестных величин (№ 304–307):

304 Первое число на 27 больше второго, а их сумма равна 95. Найдите эти числа.

305 Одно из чисел вдвое больше второго, а разность этих чисел равна 62. Найдите эти числа.

306 Сумма трёх чисел равна 192. Первое число в 5 раз меньше второго, а второе в 2 раза меньше третьего. Найдите каждое из этих чисел.

307 *Старинная задача.* Трое подмастерьев хотели купить дом за 204 гульдена. На покупку первый дал вдвое больше денег, чем второй, а второй дал вчетверо больше, чем третий. Сколько гульденов внёс каждый из подмастерьев?



308 Для трёх аквариумов требуется 61 л воды. Первый аквариум вмещает воды в 1,5 раза больше, чем третий, а второй — на 5 л больше, чем третий. Сколько литров воды вмещает каждый аквариум?

309 Продавец разложил гречневую крупу в четыре пакета. В первый пакет он насыпал в 1,5 раза больше крупы, чем во второй, а ещё в каждый из двух пакетов, т.е. в третий и четвёртый, — на 0,5 кг больше, чем во второй. Сколько килограммов крупы в каждом пакете, если масса крупы во всех четырёх пакетах вместе 14,5 кг?

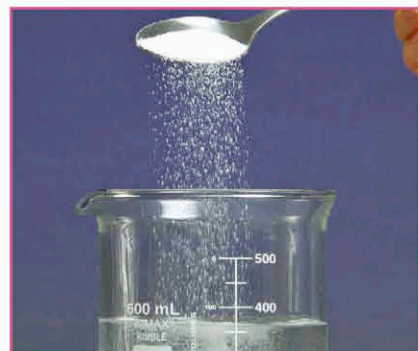
Решите задачу арифметическим способом, а затем алгебраическим (№ 310–314). Какой из них для вас удобнее?

310 На дорогу от дома до работы и обратно у Дмитрия уходит 90 мин. Обратный путь занимает у него на 10 мин больше, чем путь на работу. Сколько минут Дмитрий добирается до работы и сколько минут — обратно?

311 Сколько соли и сколько воды содержится в 200 г раствора соли, если соль и вода входят в него в отношении 1 : 4?

312 Мальчики составляют $\frac{2}{3}$ всех учащихся школы. Сколько в школе учащихся, если в ней учатся 456 мальчиков?

313 Масса сушёных яблок составляет 16 % массы свежих яблок. Сколько надо взять свежих яблок, чтобы получить 80 кг сушёных?



314 В результате снижения цен на 15 % кресло стало дешевле на 360 р. Сколько стоило кресло до уценки?

315 Тима выиграл набор коллекционных марок; $\frac{1}{5}$ этого набора он подарил брату, $\frac{1}{6}$ — сестре, а остальные 19 марок оставил себе. Сколько марок было в наборе?

Решите задачу, составив уравнение двумя способами (№ 316–317):

1) обозначив буквой искомое расстояние;

2) обозначив буквой время движения в каком-либо направлении.

316

Андрей прошёл от дома до пристани и вернулся обратно, затратив на весь путь 1 ч. От дома до пристани он шёл со скоростью 4 км/ч, а на обратном пути его скорость была 6 км/ч. Чему равно расстояние от дома до пристани?

317

Дорога от дома до школы и обратно занимает у Нины $\frac{1}{2}$ ч. В школу она идёт со скоростью 6 км/ч, а обратно — со скоростью 3 км/ч. Чему равно расстояние от дома до школы?

Решите задачу, составив уравнение двумя способами (№ 318–319):

1) обозначив буквой искомое расстояние;

2) обозначив буквой какую-нибудь скорость движения.

318

От города до посёлка мотоциклист доехал за 3 ч. Если бы он увеличил скорость на 25 км/ч, то проехал бы это расстояние за 2 ч. Чему равно расстояние от города до посёлка?

319

От станции до озера турист доехал на велосипеде за 2 ч. Пешком он мог бы пройти это расстояние за 6 ч. Чему равно расстояние от станции до озера, если на велосипеде турист едет со скоростью, на 10 км/ч большей, чем скорость, с которой он идёт пешком?

Решите задачу, обозначив буквой удобную для составления уравнения величину (№ 320–321):

320

Все имеющиеся апельсины можно разложить в 3 пакета или в 5 коробок. Сколько килограммов апельсинов имеется, если в пакет вмещается на 2 кг апельсинов больше, чем в коробку?

321

Для вязания детских изделий в мастерской было 1500 г белой и синей шерсти. При выполнении нового заказа количество белой шерсти удвоили, а к синей добавили ещё 320 г такой же шерсти. Теперь белой шерсти на 580 г больше, чем синей. Сколько шерсти каждого цвета стало в мастерской?

322

Из корзины отсыпали половину орехов, потом ещё половину остатка, затем половину нового остатка и, наконец, половину следующего остатка. После этого в корзине осталось 10 орехов. Сколько орехов было в корзине первоначально?

323

Старинная задача. У Пифагора однажды спросили, сколько у него учеников. «Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны природы, седьмая часть упражняет силу духа. Добавьте к ним трёх юношей, из коих Теон самый способный». Сколько было учеников у Пифагора?

324

Старинная задача. После того как путник прошёл 3 версты и ещё треть оставшегося пути, ему осталось пройти половину пути и ещё 1 версту. Какой путь осталось пройти путнику?



УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

НЕКОТОРЫЕ НЕАЛГОРИТМИЧЕСКИЕ
ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Уравнения, которые мы рассматривали, решаются с помощью довольно простого алгоритма, т. е. такого метода, который требует лишь точного выполнения известных правил. Однако при переводе условия задачи на математический язык может получиться уравнение, алгоритм решения которого вы ещё не знаете или алгоритма решения которого вообще нет.

Рассмотрим некоторые неалгоритмические приёмы решения уравнений. Обычно такие приёмы труднее, чем алгоритмические, ведь приходится думать самому, а не пользоваться готовыми правилами.



Пример 1. Фирма заказала 143 компьютера, чтобы распределить их поровну между своими филиалами. Однако потом фирма решила открыть ещё два филиала, и в результате каждый филиал получил на 2 компьютера меньше. Сколько у фирмы стало филиалов?

Обозначим исходное число филиалов буквой x . Тогда по условию задачи каждый филиал должен был получить $\frac{143}{x}$ компьютеров. Но филиалов стало $x + 2$, значит, каждый филиал реально получил $\frac{143}{x + 2}$ компьютера. По условию задачи каждый филиал получил на 2 компьютера меньше. Составим уравнение:

$$\frac{143}{x} = \frac{143}{x + 2} + 2.$$

Уравнение совсем непростое, но его можно решить, если вспомнить, что x — это исходное число филиалов фирмы. Поэтому числа x и $x + 2$ — это делители числа 143. Остаётся найти все натуральные делители числа 143 и выбрать такие два делителя, один из которых на 2 больше другого.

У числа 143 всего четыре натуральных делителя: 1, 11, 13, 143. Перебрав все возможные пары делителей, нетрудно увидеть, что условию удовлетворяет только пара чисел 11 и 13.

Значит, $x = 11$, а $x + 2 = 13$.

Таким образом, у фирмы стало 13 филиалов.

Пример 2. Олег задумал некоторое натуральное число. Николай предложил ему возвести это число в квадрат, после чего прибавить задуманное число и назвать результат. Результат оказался равным 90. Как Николаю узнать, какое число задумал Олег?

Обозначим задуманное число буквой x . Тогда Олег, следуя указаниям Николая, вычислил значение выражения $x^2 + x$ и получил по условию число 90. Мы пришли к уравнению

$$x^2 + x = 90.$$

Попробуем решить это уравнение. Выражение $x^2 + x$ с помощью распределительного закона можно представить в виде произведения:

$$x^2 + x = x \cdot x + 1 \cdot x = x(x + 1).$$

Следовательно, наше уравнение можно заменить таким:

$$x(x + 1) = 90.$$

Теперь ясно, что надо найти натуральное число x такое, что при умножении его на следующее натуральное число в произведении получится 90.

Такие два натуральных числа нетрудно подобрать — это 9 и 10. Значит, $x = 9$.

Кажется, что задача решена, однако это не так. Вдруг есть ещё какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию $x(x + 1) = 90$? Ведь в данном случае мы не перебирали все возможные варианты решения, а просто подобрали ответ.

Чтобы убедиться в том, что другого такого числа нет, надо провести дополнительные рассуждения, например такие: если $x > 9$, то $x + 1 > 10$, и тогда произведение $x(x + 1)$ больше 90. Точно так же x не может быть меньше 9, потому что в этом случае произведение будет меньше 90. Значит, могло быть задумано только число 9.

Итак, подбор одного или даже нескольких корней вовсе не означает, что нет других. Необходимо провести дополнительные рассуждения, чтобы проверить, что найдены все возможные решения. Такие рассуждения могут оказаться очень непростыми, и это ограничивает применение метода подбора для решения уравнений.

1 Найдите натуральный корень уравнения:

а) $x(x - 1) = 6$; б) $x^2 + x = 12$.

2 Найдите все целые корни уравнения:

а) $x(x + 2) = 35$; б) $x^2 + x = 6$.

3 Найдите целые корни уравнения

$$(x - 1)^2 + x^2 = 25.$$

4 Один из корней уравнения $\frac{6}{x-1} + \frac{6}{x} + \frac{6}{x+1} = 11$ — натуральное число. Найдите его перебором.

5 Периметр прямоугольника, стороны которого выражены целым числом сантиметров, равен 28 см. Может ли его площадь быть равной 33 см^2 ? 40 см^2 ?

6 В школе был проведён шахматный турнир, в котором каждый участник сыграл с каждым другим одну партию. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если всего было сыграно 28 партий?



ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Корнем уравнения называется число, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство.

Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней нет.

Правила преобразования уравнений:

- в уравнении можно переносить слагаемое из одной части в другую, меняя при этом его знак на противоположный;
- обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, отличное от нуля.

Уравнение вида $ax = b$, где a и b — числа, а x — переменная, называют *линейным*.

Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень: $x = \frac{b}{a}$;

если $a = 0$ и $b = 0$, то корнем уравнения является любое число;

если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение корней не имеет.

Число -3 — корень уравнения $x(x + 5) = -6$; число -6 не является корнем этого уравнения.

Решим уравнение:

$$\begin{aligned} 7x - 3 &= x - 5, \\ 7x - x &= -5 + 3, \\ 6x &= -2, \\ x &= -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Уравнение $0,5x = 5$ линейное, $x = 10$.

Корнем уравнения $0x = 0$ является любое число.

Уравнение $0x = 5$ не имеет корней.

- 1 Какие из чисел $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ являются корнями уравнения

$$x^2 + 2x - 3 = 0?$$

- 2 Докажите, что уравнение $x + 5 = x + 7$ не имеет корней.

- 3 Опишите по шагам решение уравнения $5(x - 4) = 3x + 10$.

- 4 Решите уравнение:

а) $4 - 5x = 0$;

в) $3 - 4x = x - 12$;

д) $3(2x - 1) + 12 = x$;

б) $10x + 7 = 3$;

г) $(x + 7) - (3x + 5) = 2$;

е) $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 7$.

- 5 Какое уравнение не является линейным?

1) $2x - 5 = 0$; 2) $\frac{1}{2}x = \frac{3}{8}$; 3) $\frac{2}{x} - 3 = 4$; 4) $3 - \frac{x}{2} = 0$.

- 6 Решите уравнения: $-8x = 3,2$; $\frac{2}{3}x = 0$; $5x = -1$; $-0,1x = -2$.

- 7 Разъясните суть алгебраического способа решения задач на примере следующей задачи:

Ученик задумал число, умножил его на 4, из результата вычел 5 и получил удвоенное задуманное число. Какое число задумал ученик?

- 8 Купили 165 билетов в театр и цирк, причём билетов в театр в 2 раза больше, чем в цирк. Сколько купили театральных билетов и сколько билетов в цирк?

- 9 В седьмых классах учатся 48 человек, что составляет 8 % всех учащихся школы. Сколько всего учеников в школе?



5 ГЛАВА КООРДИНАТЫ И ГРАФИКИ

- ТОЧКИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ
- МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ
- ГРАФИКИ
- ЕЩЁ НЕСКОЛЬКО ВАЖНЫХ ГРАФИКОВ
- ГРАФИКИ ВОКРУГ НАС

Узнайте больше

- ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТЕЙ, ЗАДАННЫХ РАВЕНСТВАМИ С МОДУЛЕМ



ИНТЕРЕСНО

Набрав в Интернете в поисковой системе слово «график», вы получите ответ «найдено 5 миллионов картинок». Это яркое свидетельство широты использования графиков в самых разных областях современной науки и повседневной жизни. Рост населения, колебание курса рубля, политические предпочтения населения, сравнение результатов экзаменов или спортивных достижений, изменение цен на нефть — всё это можно наглядно представить с помощью графиков. А впервые стал рассматривать кривые в координатной системе её создатель — Рене Декарт.

5.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как обозначают точки на координатной прямой и записывают их координаты.
- Как обозначают множества точек на координатной прямой.

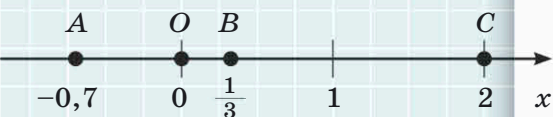


Рис. 5.1

Координату точки на прямой записывают так:

$A(-0,7)$, $B(\frac{1}{3})$, $C(2)$.

Рис. 5.2

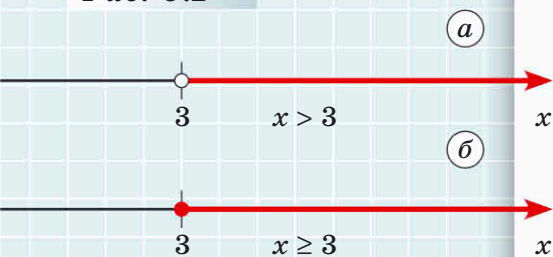
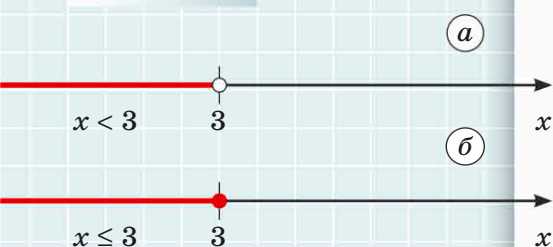


Рис. 5.3



ТОЧКИ НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

Положение точки на земном шаре определяют географические координаты, а светил на небесной сфере — небесные координаты. Это примеры сложных систем координат, мы же рассмотрим самый простой случай — как описывают положение точек на координатной прямой.

КООРДИНАТЫ ТОЧКИ НА ПРЯМОЙ Числа можно изображать точками на прямой. Для этого на прямой, расположенной, как правило, горизонтально, выбирают начало отсчёта, положительное направление и единичный отрезок. Чтобы построить точку, соответствующую числу a , вправо или влево от начала отсчёта откладывают отрезок, равный $|a|$. Число в таком случае называют **координатой** построенной точки. Например, точки A , B , C на рисунке 5.1 имеют координаты $-0,7$, $\frac{1}{3}$, 2 — это их «адреса» на координатной прямой.



Соответствие между числами и точками прямой для математиков настолько привычно, что часто число и изображающую его точку не различают и вместо «точка имеет координату $\frac{1}{3}$ » говорят просто: «точка $\frac{1}{3}$ ».

МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ Рассмотрим множество точек координатной прямой, имеющих координату, большую 3, а значит, расположенных правее точки 3 (рис. 5.2, а). Такое множество точек называют **открытым лучом**. Соответствующее множество чисел также называют открытым. Слово «луч» подсказано геометрией, а открытым его называют потому, что граничная точка 3 ему не принадлежит (на рисунке такую точку обозначают светлым кружком). На языке алгебры это множество можно задать неравенством $x > 3$.

Пусть теперь рассматриваемому множеству точек принадлежит и граничная точка 3 (рис. 5.2, б). Такое множество точек (как и соответствующее множество чисел) называют **замкнутым лучом**. Этот луч можно задать неравенством $x \geq 3$. Запись $x \geq 3$ читают так: « x больше или равно 3». Но можно сказать и по-другому: « x не меньше 3» («не меньше» — это отрицание «меньше»).

Неравенствами $x < 3$ и $x \leq 3$ также задаются лучи — открытый и замкнутый. Они изображены на рисунке 5.3, а, б. Знак $\leq$ читается как «меньше или равно»; его также можно прочесть и как «не больше».

Множество точек, изображённое на рисунке 5.4, а, как и соответствующее ему множество чисел, называют **интервалом**. Любая точка этого интервала лежит правее точки -1 и левее точки 2 . Значит, любая точка этого интервала удовлетворяет сразу двум неравенствам: $x > -1$ и $x < 2$. Такие два неравенства обычно записывают в виде двойного неравенства $-1 < x < 2$.

Множество точек, изображённое на рисунке 5.4, б (и соответствующее множество чисел), задаваемое двойным неравенством $-1 \leq x \leq 2$, называют **отрезком**.

Рассмотренные множества — лучи, интервалы и отрезки — называют **числовыми промежутками** или просто **промежутками**.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ДВУМЯ ТОЧКАМИ Если нам известна координата точки на прямой, то мы знаем и расстояние от этой точки до начала отсчёта. Пусть, например, точка A имеет координату, равную -7 , тогда $OA = |-7| = 7$. Вообще если точка A имеет координату $x = a$, то расстояние между этой точкой и началом отсчёта равно $|a|$, т. е. $OA = |a|$ (рис. 5.5).

А как найти расстояние между двумя произвольными точками A и B , зная их координаты?

Если точки A и B имеют координаты $x = a$ и $x = b$, соответственно, то $AB = |b - a|$, или $AB = |a - b|$.

Эту формулу читают так: *расстояние между двумя точками координатной прямой равно модулю разности их координат*.

Доказательство. Возможны два варианта расположения точек A (a) и B (b) на координатной прямой: A левее B и A правее B , т. е. $a < b$ и $a > b$.

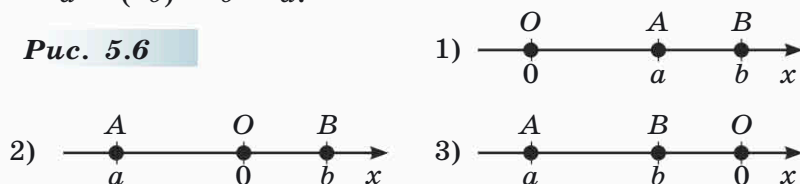
Пусть точка A (a) левее точки B (b). Рассмотрим три случая такого расположения (рис. 5.6).

1) если $a > 0$ и $b > 0$, то $AB = OB - OA = |b| - |a| = b - a$;

2) если $a < 0$ и $b > 0$, то $AB = OA + OB = |a| + |b| = -a + b = b - a$;

3) если $a < 0$ и $b < 0$, то $AB = OA - OB = |a| - |b| = -a - (-b) = b - a$.

Рис. 5.6



Итак, если $a < b$, то $AB = b - a$. Точно так же можно показать, что если $a > b$, то $AB = a - b$. Так как $b - a$ и $a - b$ — числа противоположные, то, объединяя эти два случая, приходим к формуле $AB = |b - a|$.



Запись $x \geq a$ читают так:
« x больше или равно a »,
или « x не меньше a »

Запись $x \leq a$ читают так:
« x меньше или равно a »,
или « x не больше a »

Рис. 5.4

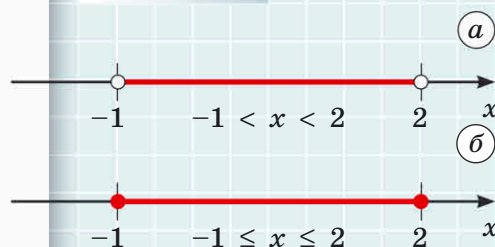
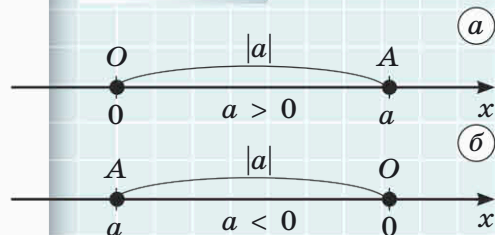


Рис. 5.5



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Чем различаются изображения и алгебраическая запись отрезка и интервала? открытого луча и замкнутого луча? Проиллюстрируйте свои ответы примерами.

● Как называется множество точек координатной прямой, заданное:
а) неравенством: $x \geq 2$; $x < 5$;
б) двойным неравенством: $2 < x < 5$; $2 \leq x \leq 5$?

● Проведите доказательство формулы расстояния между двумя точками координатной прямой для случая $a > b$ самостоятельно.

УПРАЖНЕНИЯ

ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

ЧИСЛОВЫЕ ПРОМЕЖУТКИ

325

1) Изобразите на координатной прямой множество точек, заданное неравенством: а) $x > 4$; б) $x \leq 4$; в) $x \geq -3$; г) $x < -3$. Как называется каждое из этих множеств?

2) Изобразите на координатной прямой множество всех точек: а) с отрицательной координатой; б) с неотрицательной координатой. Задайте каждое из множеств алгебраически.

Название	Изображение	Запись на языке алгебры
Открытый луч		$x > a$ $x < b$
Замкнутый луч		$x \geq a$ $x \leq b$
Отрезок		$a \leq x \leq b$
Интервал		$a < x < b$

326

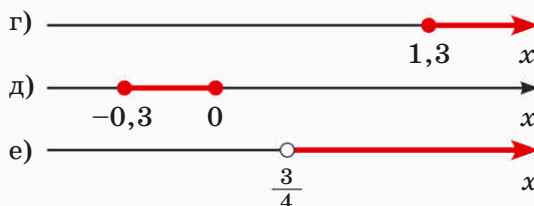
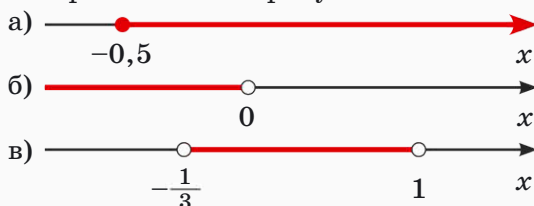
Изобразите на координатной прямой множество точек, координата которых удовлетворяет двойному неравенству:

а) $1 \leq x \leq 8$; б) $-6 \leq x \leq 2$; в) $-4 < x < 4$; г) $-3 < x < 0$.

327

Опишите на алгебраическом языке промежутки, изображённые на рисунке 5.7.

Рис. 5.7



328

Изобразите на координатной прямой и опишите на алгебраическом языке:

а) замкнутый луч с началом в точке -4 (сколько таких лучей существует?);
 б) открытый луч с началом в точке 5 (сколько таких лучей существует?);
 в) интервал от точки -4 до точки 5 ;
 г) отрезок с концами в точках -5 и 4 .

329

Какие из чисел 0 ; $\frac{1}{3}$; -2 ; 3 ; -4 принадлежат промежутку:

а) $-1 < x < 4$; б) $0 \leq x \leq 5$; в) $x \geq 3$; г) $x < -5$?

330

Определите, сколько целых чисел принадлежит указанному промежутку, и назовите наименьшее и наибольшее целое число, принадлежащее промежутку (если такое существует):

а) сначала интервалу $-2,5 < x < 5$, а затем отрезку $-2,5 \leq x \leq 5$;

б) сначала лучу $x \geq -3\frac{1}{3}$, а затем лучу $x > -3\frac{1}{3}$?

331

1) На рисунке 5.8 изображены числовые промежутки, которые называют *полуинтервалами*. Запишите соответствующие им неравенства.

Рис. 5.8



2) Изобразите на координатной прямой промежутки:

а) $-2 < x \leq 5$; б) $0 \leq x < 6$.

332

Изобразите на координатной прямой промежутки (используйте для этого карандаши разных цветов):

- а) $-7 \leq x \leq 0$ и $-3 \leq x \leq 4$; б) $0 \leq x \leq 8$ и $1 < x < 8$.

Найдите объединение и пересечение этих промежутков.

РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ КООРДИНАТНОЙ ПРЯМОЙ

333

На координатной прямой отмечены точки A, B, C, D (рис. 5.9).



- а) Найдите расстояние между точками: A и B , A и C , A и D .
б) Найдите длины отрезков BO , BC , OC и CD .

Рис. 5.9

334

Найдите длину отрезка MN , если: а) $M(-5)$, $N(-15)$; б) $M(-\frac{1}{2})$, $N(\frac{1}{2})$.

335

Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 5.10.

Рис. 5.10

336

Найдите координату точки B , если:
а) $A(-1)$, $AB = 4$; б) $A(-2)$, $AB = 6$.

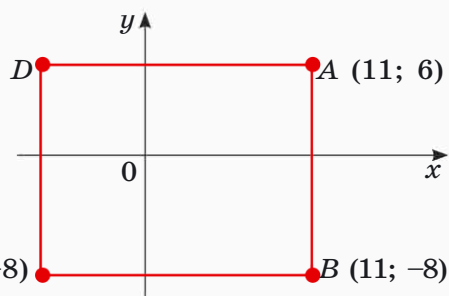
337

1) Разберите, как найдена координата середины отрезка с концами в точках $A(-11,5)$ и $B(3,9)$.

Вычислим расстояние между точками A и B : $AB = |3,9 - (-11,5)| = |15,4| = 15,4$.

Чтобы найти координату x середины отрезка AB , можно к координате точки A прибавить половину расстояния между точками A и B : $x = -11,5 + 7,7 = -3,8$.

2) Найдите координату точки C , которая является серединой отрезка с концами в точках: а) $A(-6,8)$ и $B(12,4)$; б) $A(10,6)$ и $B(-2,4)$.



338

Изобразите на координатной прямой множество точек, координаты которых удовлетворяют условию: а) $|x| = 2$; б) $|x| \leq 2$; в) $|x| \geq 3$.

Подсказка. Прочитайте данное условие, используя слово «расстояние», например: $|x| = 5$ — расстояние от точки x до 0 равно 5.

339

1) Прочитайте, используя слово «расстояние»:

- а) $|m - 1| = 5$; б) $|m - (-2)| > 3$; в) $|m - 6| < 20$; г) $|m + 10| \leq 1$.

2) Запишите предложение с помощью знака модуля:

- а) расстояние между точками m и 5 равно 8;
б) расстояние между точками n и 3 больше 1;
в) расстояние между точками x и -5 меньше или равно 10;
г) расстояние между точками y и -7 меньше или равно 3.

3) Изобразите на координатной прямой множество точек, удовлетворяющих условиям:

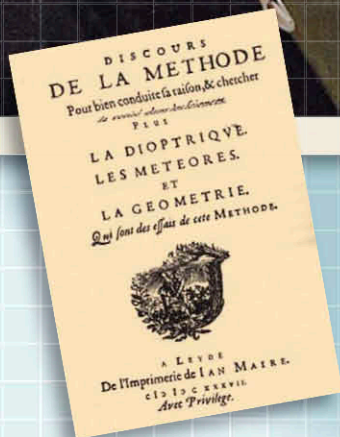
- а) $|m - 2| = 5$; $|m - 2| \leq 5$; $|m - 2| \geq 5$; б) $|m - 1| = 8$; $|m - 1| \leq 8$; $|m - 1| \geq 8$.

5.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Что представляют собой множества точек на координатной плоскости.

Основная заслуга в создании метода координат принадлежит французскому математику Рене Декарту (1596–1650). Он стал основателем аналитической геометрии, в которой геометрические задачи переводились на язык алгебры при помощи метода координат. Известно высказывание Декарта: «Я решил все задачи!» Он имел в виду геометрические задачи своего времени.



МНОЖЕСТВА ТОЧЕК НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

На прямой положение точки определяется одной координатой. А если нам известна только одна из координат точки на плоскости? Где такая точка может быть расположена? Похожую задачу решали герои романа Жюль Верна «Дети капитана Гранта». Обнаружив записку, они смогли разобрать только одну из географических координат — широту того места, где корабль потерпел крушение. Поэтому им пришлось обходить всю Землю по 37-й параллели.

ТОЧКИ С ОДНОЙ КООРДИНАТОЙ НА ПЛОСКОСТИ На плоскости в прямоугольной (декартовой) системе координат положение точки определяется двумя её координатами — абсциссой и ординатой.

Пусть задана только одна координата точки — ордината, например, известно, что $y = 2$. Посмотрите на рисунок 5.11. Понятно, что ординату, равную 2, имеют и точка A , и точка B , и точка C , и вообще все точки, лежащие на прямой, параллельной оси абсцисс и проходящей через точку 2 на оси ординат. Любая другая точка координатной плоскости имеет ординату, отличную от 2. Таким образом, равенство $y = 2$ задаёт на координатной плоскости прямую, параллельную оси абсцисс.

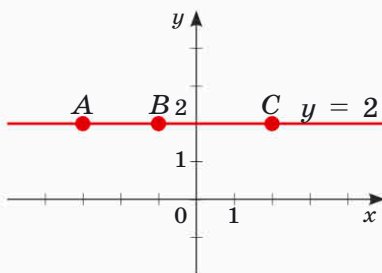


Рис. 5.11

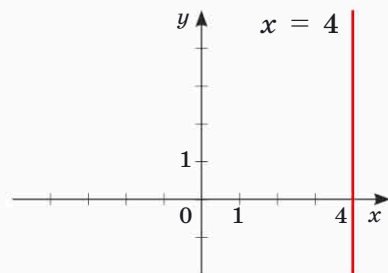


Рис. 5.12

Точно так же множество точек, координаты которых удовлетворяют условию $x = 4$, — это прямая, параллельная оси ординат (рис. 5.12).



Ось ординат задаётся равенством $x = 0$.
Ось абсцисс задаётся равенством $y = 0$.

ЧТО ЗАДАЮТ НЕРАВЕНСТВА На координатной прямой неравенству $x > 3$ соответствует открытый луч. А на координатной плоскости это же условие задаст уже

полуплоскость; она расположена правее прямой $x = 3$ (рис. 5.13). Все точки этой полуплоскости имеют абсциссы, большие 3. Ни точки прямой $x = 3$, ни точки левее этой прямой таким свойством не обладают.

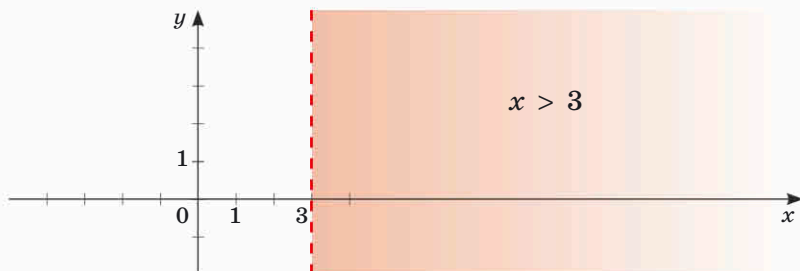
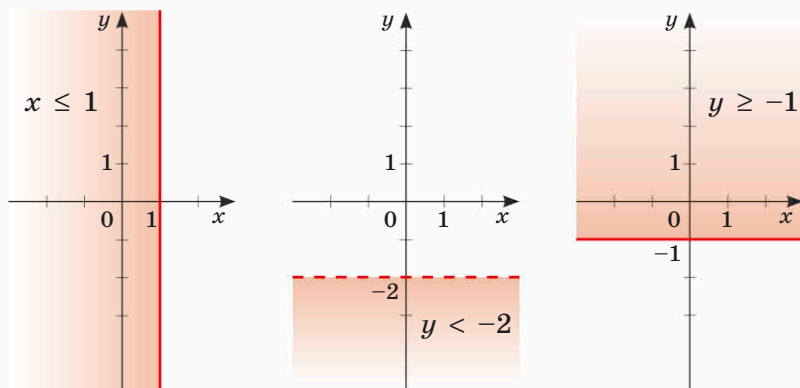


Рис. 5.13

На рисунке 5.14 изображены некоторые полуплоскости и указаны неравенства, которым они соответствуют.

Рис. 5.14



Двойное неравенство $1 \leq x \leq 3$ задаёт на координатной плоскости вертикальную полосу (рис. 5.15), а двойное неравенство $2 \leq y \leq 5$ — горизонтальную полосу (рис. 5.16). А если потребовать, чтобы выполнялись одновременно оба условия, то на координатной плоскости получится пересечение этих полос — прямоугольник (рис. 5.17).

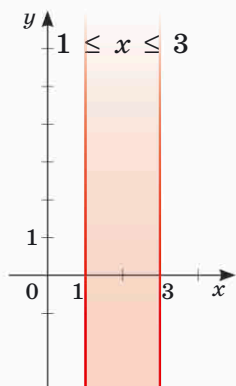


Рис. 5.15

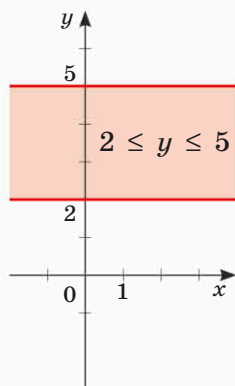


Рис. 5.16

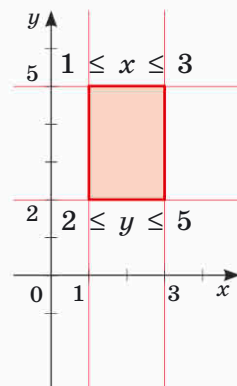


Рис. 5.17

Первые попытки построения прямоугольной системы координат связывают с именем французского математика, физика, астронома, философа и теолога Николая Орезмского (ок. 1323–1382). Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой то, что мы сейчас называем абсциссой и ординатой.



«Эйнштейн XIV века». Миниатюра. Французская национальная библиотека. Париж

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какими условиями задаются ось x и ось y ?
- Какое из равенств $x = 5$ и $y = 5$ задаёт в координатной плоскости горизонтальную прямую, какое — вертикальную? Сделайте рисунок.
- На рисунке 5.14 изображена полуплоскость, заданная неравенством $y \geq -1$. Какие из данных точек принадлежат этой полуплоскости: $(-3; 1)$; $(2; 0)$; $(2; -3)$; $(0; -2)$; $(3; -1)$; $(100; -2)$; $(-1; 100)$?
- Назовите координаты каких-нибудь двух точек, которые принадлежат прямоугольнику, изображённого на рисунке 5.17, и двух точек, которые ему не принадлежат.

УПРАЖНЕНИЯ

МНОЖЕСТВА ТОЧЕК, КОТОРЫЕ ЗАДАЮТСЯ РАВЕНСТВАМИ

340

Изобразите на координатной плоскости множество точек, которое задаётся равенством:

а) $x = 4$;

в) $y = 13$;

д) $x = 0$;

б) $x = -3,5$;

г) $y = -2,25$;

е) $y = 0$.

341

Опишите на алгебраическом языке прямые, изображённые на рисунке 5.18.

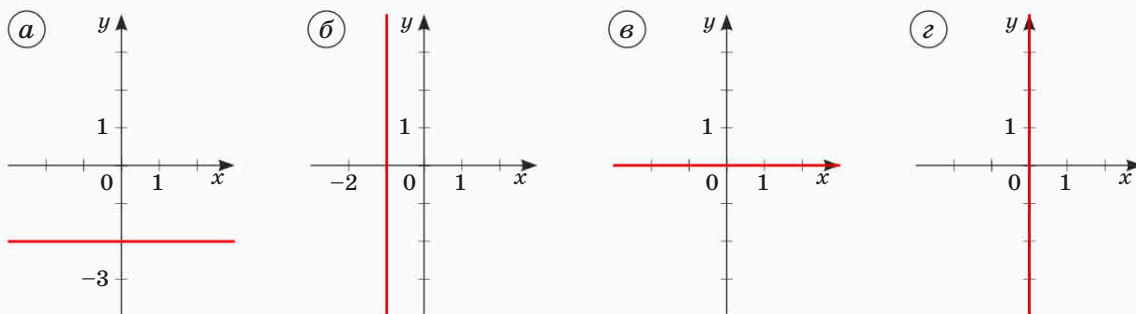


Рис. 5.18

342

Опишите на алгебраическом языке:

а) прямую, проходящую через точку 5 оси ординат и параллельную оси абсцисс;

б) прямую, проходящую через точку $(-5; 2)$ и параллельную оси ординат.

343

а) Точки $A(2; -1)$ и $B(5; a)$ расположены на одной прямой, перпендикулярной оси ординат. Найдите число a .

б) Точки $C(-4; 2)$ и $D(m; -3)$ расположены на одной прямой, параллельной оси ординат. Найдите число m .

в) Точки $K(2; 7)$ и $M(-7; b)$ расположены на одной прямой, параллельной оси абсцисс. Найдите число b .

МНОЖЕСТВА ТОЧЕК, КОТОРЫЕ ЗАДАЮТСЯ НЕРАВЕНСТВАМИ

344

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $x > 5$;

в) $x \geq 0$;

д) $y \geq -1,5$;

б) $x \leq \frac{4}{5}$;

г) $y < -7$;

е) $y \geq 0$.

345

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют двойному неравенству:

а) $-12 \leq x \leq 6$;

б) $0,5 < x < 3,5$;

в) $-7 \leq y \leq 7$;

г) $-2,5 < y < -1$.

346

Изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых:

а) $-4 \leq x \leq 1$ и $-2 \leq y \leq 6$;

б) $0 \leq x \leq 9$ и $0 \leq y \leq 9$.

347

Опишите на алгебраическом языке области координатной плоскости, изображённые на рисунке 5.19.

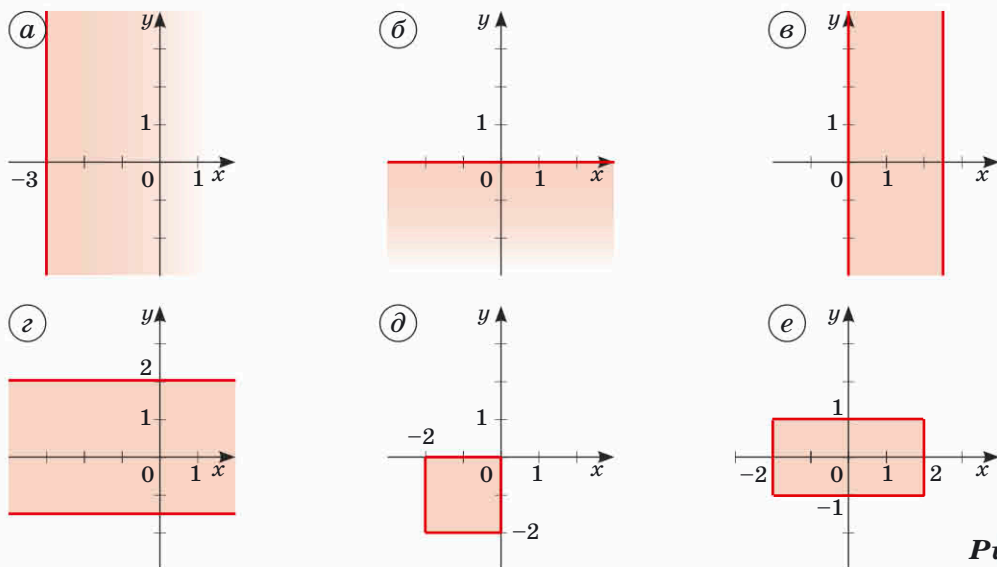


Рис. 5.19

348

Неравенства $x \geq 0$ и $y \geq 0$ задают первую координатную четверть (рис. 5.20) — все её точки имеют неотрицательные координаты. Опишите на алгебраическом языке каждую из остальных координатных четвертей.

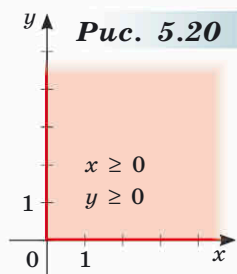
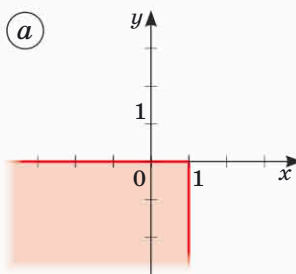
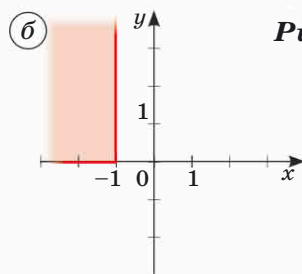


Рис. 5.20



а)



б)

Рис. 5.21

349

Задайте алгебраически множества точек, изображённые на рисунке 5.21.

350

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $|x| = 3$;

в) $|y| \leq 3$;

д) $|x| \leq 5$ и $|y| \leq 5$;

б) $|y| = 2$;

г) $|x| \geq 8$;

е) $|x| \geq 2$ и $|y| \geq 2$.

351

Изобразите на координатной плоскости множество точек, заданное условиями:

а) $x > 1$ и $y = 1$;

б) $1 < x < 4$ и $y = 3$;

в) $|x| = 2$ и $|y| > 4$.

352

Постройте на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке прямую, симметричную точкам прямой $x = 3$ относительно: а) оси ординат; б) прямой $x = 1$.

353

Изобразите на координатной плоскости и опишите на алгебраическом языке множество точек, симметричных относительно оси абсцисс точкам полосы, заданной неравенством $2 \leq y \leq 5$.

5.3

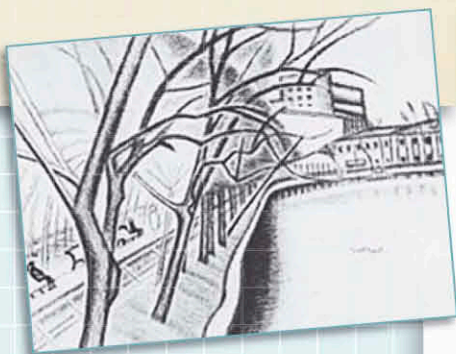
ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как выглядят на координатной плоскости графики зависимостей:

$$y = x; y = -x; |y| = |x|.$$

Какое множество на координатной плоскости задаёт неравенство $y > x$.

Слово «график» заимствовано через немецкий язык из латыни, латинское же слово *graphica* происходит от греческого *γραφική*, означающего «живопись, рисование, письмо, черчение». Связь сохраняется: вид изобразительного искусства, использующий в качестве основных изобразительных средств линии, штрихи, пятна и точки, носит название «графика».



Гурий Захаров.
«Чистые пруды весной», 1978

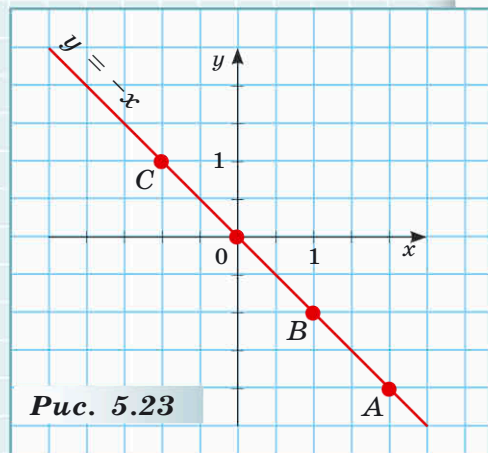


Рис. 5.23

ГРАФИКИ

Абсциссы и ординаты множества точек координатной плоскости могут быть связаны какой-либо зависимостью, например прямой пропорциональностью или обратной пропорциональностью. Что же представляют собой такие множества точек? Начнём рассмотрение с самого простого случая: ордината равна абсциссе.

ОРДИНАТА РАВНА АБСЦИССЕ Отметим на координатной плоскости несколько точек, имеющих равные координаты, например, $A(0; 0)$, $B(1; 1)$, $C(-1; -1)$, $D(0,5; 0,5)$. Посмотрите на рисунок 5.22, а. Хорошо видно, что эти точки лежат на одной прямой, состоящей из биссектрис I и III координатных углов (рис. 5.22, б). Вообще если ордината и абсцисса точки равны, то эта точка принадлежит биссектрисе I или III координатных углов, и наоборот, у всякой точки, принадлежащей этим биссектрисам, абсцисса и ордината — равные числа.

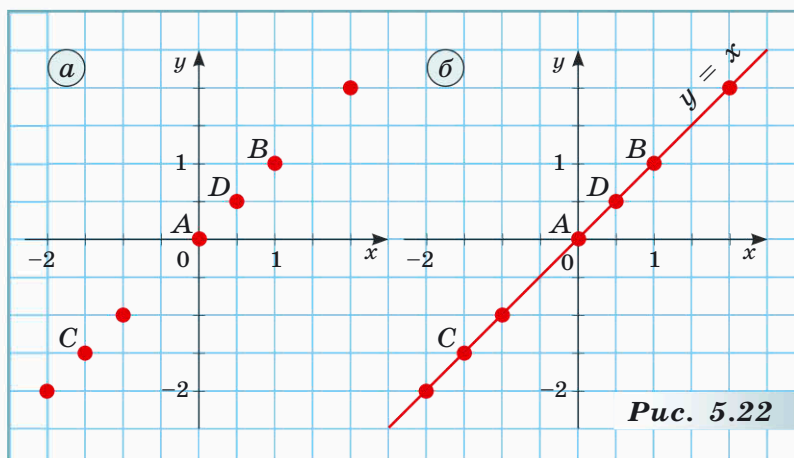


Рис. 5.22

Таким образом, равенство $y = x$ задаёт на координатной плоскости прямую, которая является объединением биссектрис I и III координатных углов. Говорят, что эта прямая — **график зависимости $y = x$** .

ОРДИНАТА И АБСЦИССА — ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ ЧИСЛА На рисунке 5.23 изображены биссектрисы II и IV координатных углов. Как описать получившуюся прямую на алгебраическом языке? Попробуем найти зависимость, которая связывает абсциссы и ординаты её точек.

Этой прямой принадлежат, например, точки $A(2; -2)$, $B(1; -1)$, $C(-1; 1)$. У каждой из этих точек абсцисса и ордината — противоположные числа. На языке алгебры это можно записать так: $y = -x$. Равенству $y = -x$ удовлетворяет любая точка рассматриваемой прямой, и никакая другая точка координатной плоскости этому условию не удовлетворяет. Значит, прямая, которая

является объединением биссектрис II и IV координатных углов — задаётся равенством $y = -x$. Иными словами, эта прямая — график зависимости $y = -x$.

БОЛЕЕ СЛОЖНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ Построим на координатной плоскости множество точек, координаты которых связаны более сложным соотношением — равенством $|y| = |x|$. При этом нам пригодятся факты, рассмотренные выше.

Если модули двух чисел равны, то эти числа либо равны, либо противоположны. Следовательно, условие $|y| = |x|$ означает, что $y = x$ или $y = -x$.

Значит, множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $|y| = |x|$, образовано двумя прямыми $y = x$ и $y = -x$. Иными словами, оно является объединением этих прямых (рис. 5.24).

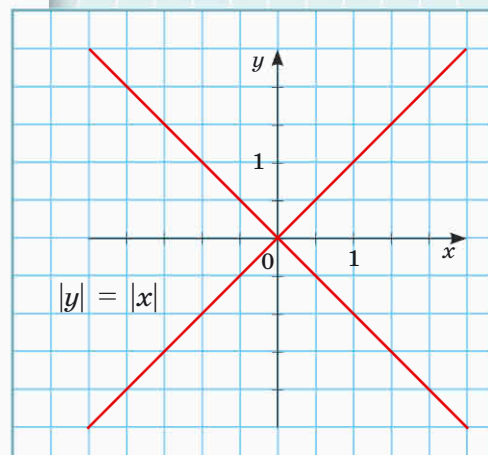


Рис. 5.24

ОРДИНАТА БОЛЬШЕ АБСЦИССЫ Равенство $y = x$ задаёт прямую, которая разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. Какая из них соответствует неравенству $y > x$?

Возьмём на прямой $y = x$ какую-нибудь точку, например $B(1; 1)$. Понятно, что точки, у которых абсцисса равна 1, а ордината больше 1, лежат на вертикали $x = 1$ выше точки B (рис. 5.25, а). На рисунке показаны две такие точки: $(1; 2)$ и $(1; 2,75)$. Вообще точки, у которых абсцисса равна некоторому числу a , а ордината больше a , расположены на вертикальной прямой $x = a$ выше точки её пересечения с прямой $y = x$.

Таким образом, неравенством $y > x$ задаётся полуплоскость, расположенная над прямой $y = x$ (обозначена голубым цветом на рисунке 5.25, б). Так как неравенство $y > x$ строгое, то сама прямая $y = x$ рассматриваемому множеству не принадлежит. Чтобы показать это, мы провели её штриховой линией.

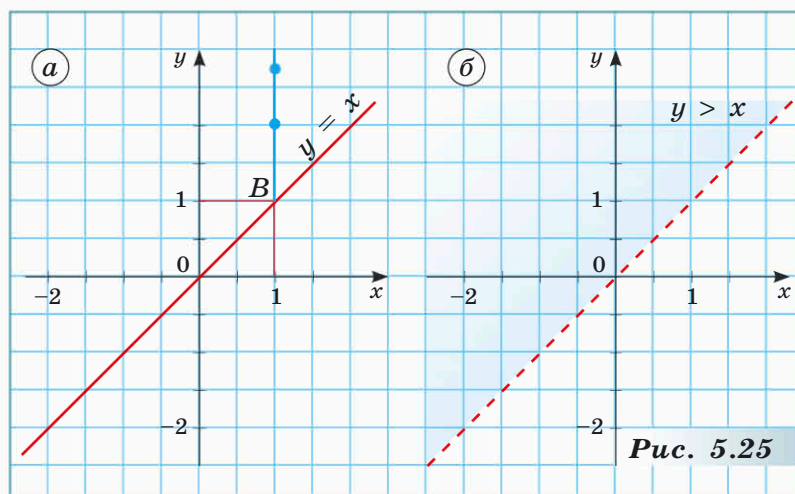


Рис. 5.25

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Что является графиком зависимости $y = x$? Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих этому графику. Какие из следующих точек принадлежат этому графику: $(7; -7)$; $(7; 7)$; $(-7; -7)$; $(-7; 7)$?

● Что является графиком зависимости $y = -x$? Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих этому графику. Какие из следующих точек принадлежат этому графику: $(9; -9)$; $(9; 9)$; $(-9; -9)$; $(-9; 9)$?

● Каким неравенством задаётся полуплоскость, расположенная под прямой $y = x$?

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ГРАФИКИ

354

1) Постройте график зависимости $y = x + 2$. Для этого:● Вычислите значения y для указанных значений x и заполните таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

● Постройте точки, координаты которых занесены в таблицу.

● Если вы всё сделаете аккуратно, то все точки будут лежать на одной прямой. Проведите эту прямую с помощью линейки.

2) Обозначьте точки пересечения построенной прямой с осями координат. Запишите координаты этих точек.

355

Постройте по точкам график зависимости, заданной равенством:

а) $y = -2x$; б) $y = 2 - x$; в) $y - x = -2$.*Подсказка.* В каждом случае составьте таблицу значений x и y . В задании в) удобно сначала выразить y через x .

356

Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям:

а) $y = x$ и $-2 \leq x \leq 3$;г) $x + y = 0$ и $2 \leq x \leq 5$;б) $y - x = 0$ и $-1 \leq x \leq 1$;д) $|y| = |x|$ и $-2 \leq x \leq 2$;в) $y = -x$ и $-3 \leq x \leq 3$;е) $|x| = |y|$ и $-5 \leq x \leq 5$.

357

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Как получить график зависимости $y = x + a$ из графика зависимости $y = x$? Как эти графики связаны друг с другом?1) Постройте графики зависимости $y = x + a$ при $a = 1$; 3; -1; -5.

Для этого заполните таблицу:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$x + 1$									
$x + 3$									
$x - 1$									
$x - 5$									

2) Для каждого графика отметьте:

а) как связаны ординаты его

точек с ординатами точек графика $y = x$ при одной и той же абсциссе;б) как расположены его точки относительно точек графика $y = x$, имеющих ту же абсциссу?

3) Каково взаимное расположение прямых?

4) Закончите предложения:

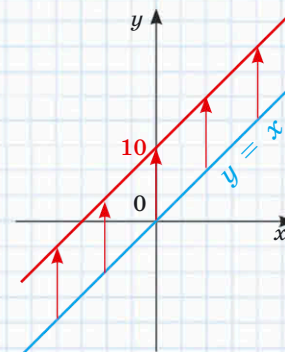
● Если прямую $y = x$ переместить, как твёрдое тело, параллельно самой себе на 10 единиц вверх, получится прямая _____.● Если прямую $y = x$ переместить, как твёрдое тело, параллельно самой себе на 100 единиц вниз, получится прямая _____.

Рис. 5.26

РАВЕНСТВА И НЕРАВЕНСТВА НА КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

358

Принадлежит ли графику зависимости, заданной равенством $y = 1 - x$, точка $A(1; 0)$? $B(-2; 3)$? $C(3; 2)$? $D(-4; -3)$? $E(100; -99)$? Назовите координаты ещё двух точек, принадлежащих этому графику, и двух точек, не принадлежащих ему.

359

Из точек $A(-5; 0)$, $B(-2; 3)$, $C(3; 2)$, $D(-4; -1)$, $E(10; -15)$ выберите те, которые принадлежат графику зависимости $x + y = -5$.

360

Задайте на алгебраическом языке и изобразите на координатной плоскости множество точек, у которых:

- ордината равна утроенной абсциссе;
- ордината на 3 больше абсциссы;
- сумма абсциссы и ординаты равна 3;
- абсцисса на 2 больше ординаты.

361

Опишите на алгебраическом языке области координатной плоскости (рис. 5.27).

362

Область 1 на рисунке 5.28 является пересечением двух областей, которые задаются неравенствами $y > x$ и $y > -x$. Пересечением каких областей являются области 2, 3 и 4?

363

- Составьте таблицу соответственных значений x и y по графику, который изображён на рисунке 5.29, а. Какая зависимость связывает координаты точек этой прямой? Запишите её на алгебраическом языке.
- Выполните задание а), используя график, изображённый на рисунке 5.29, б.

364

На рисунке 5.29, а изображена прямая, которая является графиком зависимости $y = \frac{1}{2}x$. Перенесите этот рисунок в тетрадь и постройте в этой же системе координат прямую, симметричную этой прямой относительно оси ординат. Найдите зависимость, связывающую координаты точек построенной прямой, и задайте её алгебраически.

365

Известно, что график зависимости $y = 2x$ — прямая. Постройте эту прямую по точкам. (Сколько точек для этого достаточно?) Постройте прямую, симметричную прямой $y = 2x$ относительно оси абсцисс. Найдите зависимость, которой удовлетворяют координаты точек этой прямой.

366

Постройте множество точек плоскости, координаты которых связаны соотношением $y^2 = x^2$.

Рис. 5.27

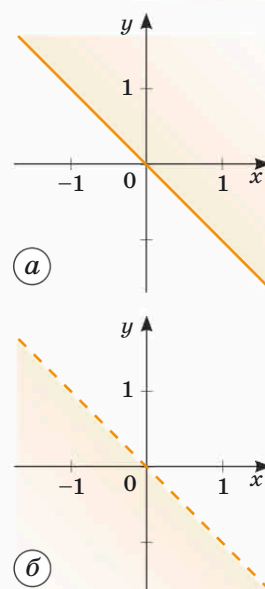


Рис. 5.28

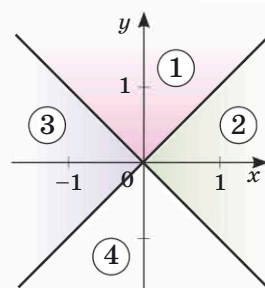
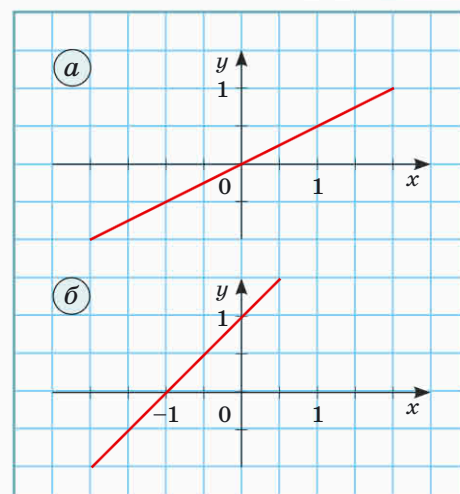


Рис. 5.29



5.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как выглядят на координатной плоскости графики зависимостей:

$$y = x; y = x^2; y = x^3 \text{ и } y = |x|.$$

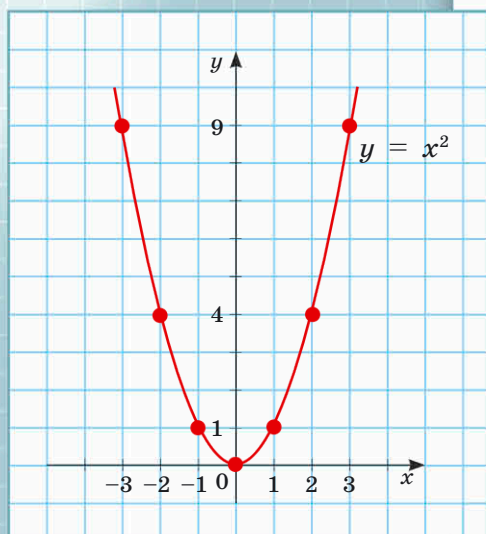


Рис. 5.30

Параболы вы не раз могли наблюдать в жизни, например струю фонтана. Именно по параболе, несколько искажённой сопротивлением воздуха, летит камень, мяч, снаряд и любое другое тело, брошенное под углом к горизонту.



ЕЩЁ НЕСКОЛЬКО ВАЖНЫХ ГРАФИКОВ

Попробуем теперь рассмотреть более сложные зависимости, которые могут связывать абсциссы и ординаты точек координатной плоскости, и посмотрим, как будут выглядеть соответствующие графики.

ПАРАБОЛА Пусть координаты связаны соотношением $y = x^2$. Чтобы построить график, вычислим сначала координаты нескольких его точек и занесём результаты в таблицу:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	0	1	1	4	4	9	9

Отметим соответствующие точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 5.30). Этот график называется **параболой**.

Можно вычислить координаты других точек, удовлетворяющих равенству $y = x^2$, и отметить их на координатной плоскости. Все они попадут на эту параболу.

Парабола расположена в верхней полуплоскости. Об этом можно догадаться заранее, ещё до построения графика — по самому равенству $y = x^2$. Как вы знаете, квадрат любого числа положительный или равен нулю, т. е. при любом x выполняется неравенство $y \geq 0$.

Парабола симметрична относительно оси ординат, так как противоположным значениям x соответствует одно и то же значение y . Ось симметрии делит параболу на две части, называемые *ветвями параболы*; эти ветви неограниченно уходят вверх. Точку $(0; 0)$, в которой сходятся ветви параболы, называют *вершиной параболы*. В вершине одна ветвь параболы плавно переходит в другую. И в этой же точке, как говорят математики, парабола *касается* оси абсцисс.

Парабола похожа на чашу



КУБИЧЕСКАЯ ПАРАБОЛА Построим график зависимости $y = x^3$. Вычислим координаты нескольких точек, удовлетворяющих равенству $y = x^3$, и заполним таблицу:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3
y	0	1	-1	8	-8	27	-27

Отметим соответствующие точки на координатной плоскости и соединим их плавной линией (рис. 5.31). Эта линия называется **кубической параболой**.

Кубическая парабола симметрична относительно начала координат. Центр симметрии делит её на две ветви, расположенные в I и III координатных четвертях.

ГРАФИК ЗАВИСИМОСТИ $y = |x|$ Построим график зависимости $y = |x|$, используя уже знакомые графики. Модуль положительного числа равен самому числу, модуль нуля равен нулю, т. е. также равен самому числу. Значит, при $x \geq 0$ верно равенство $|x| = x$. Модуль отрицательного числа равен противоположному числу. Значит, при $x < 0$ верно равенство $|x| = -x$. Поэтому условие $y = |x|$ можно заменить двумя: 1) $y = x$ при $x \geq 0$ и 2) $y = -x$ при $x < 0$. Обычно эти два условия записывают так:

$$y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Зависимость $y = |x|$ на разных промежутках задана разными условиями, поэтому и график строится по частям.

При $x \geq 0$ график совпадает с известной нам прямой $y = x$. Понятно, что мы берём только те точки этой прямой, абсциссы которых неотрицательны, т. е. луч, расположенный в I координатной четверти (рис. 5.32).

При $x < 0$ график совпадает с прямой $y = -x$. Здесь мы берём только те точки этой прямой, абсциссы которых отрицательны, т. е. луч, расположенный во II координатной четверти.

Таким образом, график зависимости $y = |x|$ — это ломаная, образованная двумя лучами. На рисунке 5.32 она выделена красным цветом.

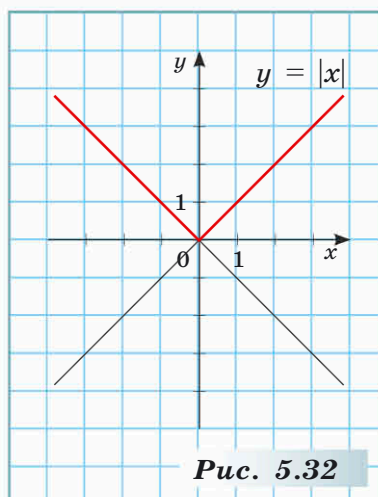


Рис. 5.32

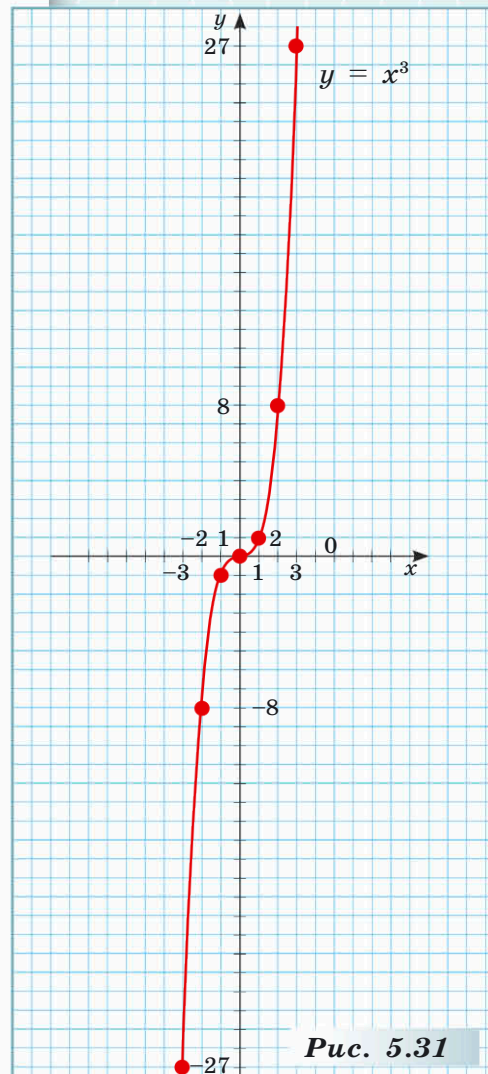


Рис. 5.31

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Используя рисунок 5.30, опишите свойства параболы.
- Точки A и B принадлежат параболе, заданной равенством $y = x^2$. Абсцисса точки A равна 5, абсцисса точки B равна -7. Назовите ординаты этих точек.
- Используя рисунок 5.31, опишите свойства кубической параболы.
- Используя рисунок 5.32, опишите свойства графика зависимости $y = |x|$.

УПРАЖНЕНИЯ

СТРОИМ ПАРАБОЛУ И КУБИЧЕСКУЮ ПАРАБОЛУ

367 Постройте по точкам график зависимости: а) $y = -x^2$; б) $y = -x^3$.

368 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = x^2$, где: а) $-3 \leq x \leq 3$; б) $-2 \leq x \leq 1$; в) $x \leq 0$.

369 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = x^3$, где: а) $-1 \leq x \leq 1$; б) $x \geq 0$; в) $x \leq 1$.

370 Известно, что $y = x^2 + 2x$. Составьте таблицу соответственных значений x и y , постройте по точкам график этой зависимости. Вы получили уже знакомую вам линию. Какую?

СТРОИМ ГРАФИКИ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ЧАСТЕЙ

371 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству $y = |x|$, где: а) $x \leq 1$; б) $x \geq -4$; в) $-2 \leq x \leq 2$.

372 Множество точек на плоскости задано условиями: $y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$
Изобразите это множество точек. Какие из точек $(-1; 0)$, $(0,5; 0,5)$, $(1; 0)$; $(2; 2)$; $(-3; -3)$ принадлежат этому множеству?

373 Какими условиями задано множество точек на плоскости (рис. 5.33)?

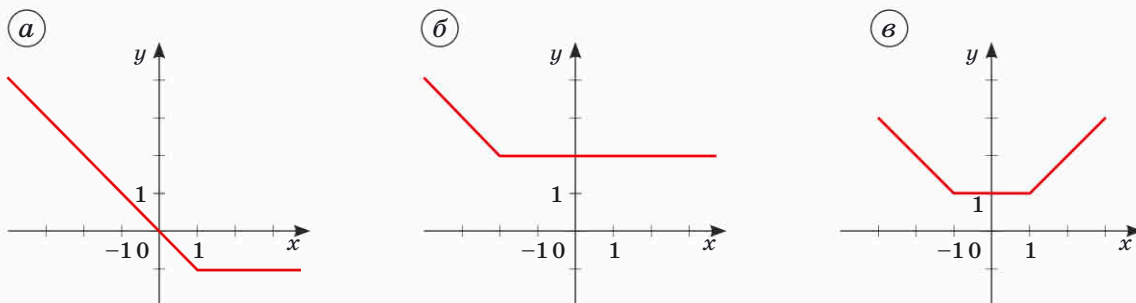


Рис. 5.33

374 Множество точек на плоскости задано условиями: $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$
Изобразите это множество точек. Какие из точек $(0; 0)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$, $(2; 4)$; $(-2; 4)$, $(3; 1)$ принадлежат этому множеству?

375 Постройте график зависимости, если известно, что:

а) $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 0 & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } -2 < x < 0, \\ 2 & \text{при } x \leq -2; \end{cases}$

$$\text{в) } y = \begin{cases} -x & \text{при } x \geq 0, \\ x^3 & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } y = \begin{cases} 3 & \text{при } x \geq 3, \\ |x| & \text{при } -3 < x < 3, \\ 3 & \text{при } x \leq -3; \end{cases}$$

$$\text{г) } y = \begin{cases} 3 & \text{при } x \geq 3, \\ x & \text{при } -3 < x < 3, \\ -3 & \text{при } x \leq -3; \end{cases}$$

$$\text{е) } y = \begin{cases} 4 & \text{при } x \leq -2, \\ x^2 & \text{при } -2 < x < 2, \\ 4 & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

376

Постройте график зависимости:

$$\text{а) } y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \geq 1, \\ 1 & \text{при } -1 < x < 1, \\ -x & \text{при } x \leq -1; \end{cases}$$

$$\text{в) } y = \begin{cases} 4 & \text{при } x \geq 2, \\ x^2 & \text{при } 0 < x < 2, \\ -x & \text{при } x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } y = \begin{cases} x & \text{при } |x| \geq 1, \\ x^3 & \text{при } |x| < 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } y = \begin{cases} |x| & \text{при } |x| \geq 1, \\ x^2 & \text{при } |x| < 1. \end{cases}$$

МНОЖЕСТВА ТОЧЕК КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ

377

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству $y > |x|$. Запишите несколько точек, принадлежащих этому множеству.

378

В одной системе координат постройте параболу $y = x^2$ и прямую $y = -x$. Найдите координаты точек пересечения этих графиков. При каких значениях x парабола лежит выше прямой? ниже прямой?

379

Найдите координаты точек плоскости, в которых кубическая парабола $y = x^3$ пересекается с прямой $y = x$. Укажите промежутки значений x , в которых прямая расположена выше кубической параболы.

380

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$\text{а) } y = x^2 \text{ и } 1 \leq y \leq 9;$$

$$\text{в) } y = |x| \text{ и } y \leq 3;$$

$$\text{б) } y = x^3 \text{ и } -8 \leq y \leq 1;$$

$$\text{г) } y = |x| \text{ и } y \geq 1.$$

381

Найдите координаты общих точек графиков зависимостей $y = x^2$ и $y = |x|$.

382

Постройте параболу, симметричную параболе $y = x^2$ относительно оси абсцисс. Каким соотношением связаны координаты точек этой параболы?

383

Какими условиями задано множество точек на плоскости (рис. 5.34)?

384

Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству: а) $x = y^2$; б) $y = |x|$.

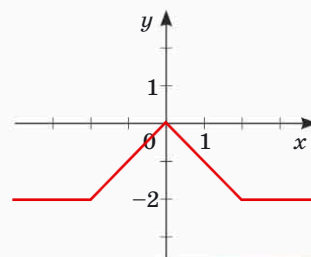


Рис. 5.34

Несерно!

Ученик выписывал точки, которые принадлежат графику зависимости $y = |x|$. Его запись: (0; 0), (10; 10), (2; -2), (-2; 2), (-3; -3). Есть ли в этой записи ошибки?

5.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как информацию представляют графически.

ГРАФИКИ ВОКРУГ НАС

Для наглядного представления и анализа информации используют таблицы, диаграммы, схемы. Один из самых удобных и наглядных способов — графический способ.

ГРАФИК ТЕМПЕРАТУРЫ Метеорологическая служба фиксирует изменение температуры в течение суток. Полученные данные можно проанализировать, представив их в виде таблицы:

Время суток t , ч	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Температура T , °C	3	0	-1	-3	-1	0	2	5	7	5	4	4	2

Однако гораздо удобнее провести исследование поведения температуры, представив эти же данные графически. Перенесём данные таблицы на координатную плоскость; по оси абсцисс будем откладывать значения времени, а по оси ординат — значения температуры (**рис. 5.35**). В данной таблице замеры температуры

представлены через каждые 2 часа. Обычно говорят так: таблица составлена с шагом, равным 2 ч. Можно получить более точные представления об изменении температуры в течение суток, уменьшая шаг таблицы. При этом на координатной плоскости мы будем получать всё больше и больше точек (**рис. 5.36**).

Рис. 5.35

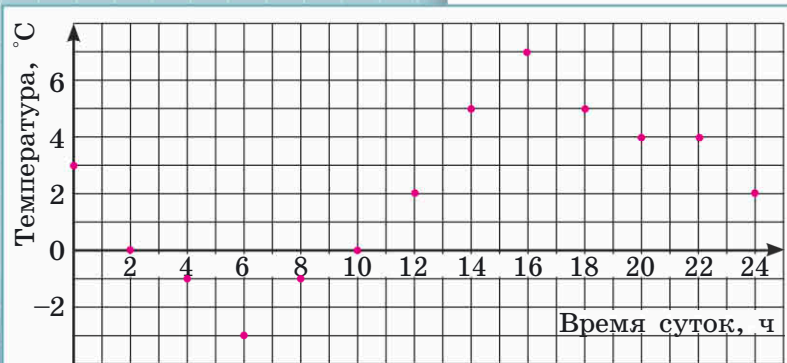
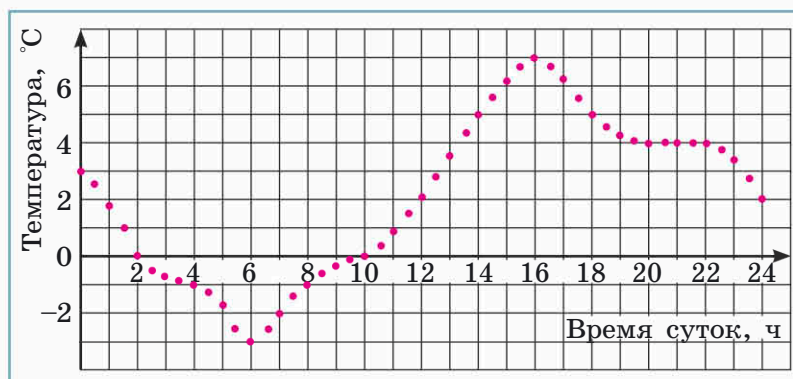
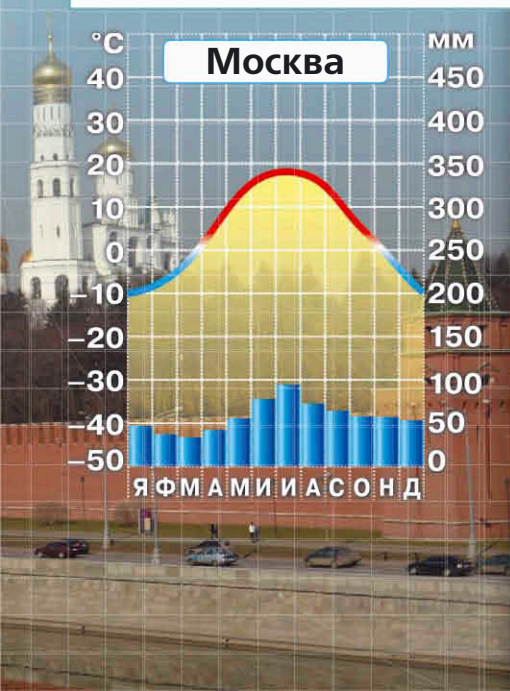


Рис. 5.36



Все построенные таким образом точки намечают некоторую линию (**рис. 5.37**). Эту линию называют графиком температуры.

График температуры даёт нам много полезной информации. Например, по графику легко узнать, когда



температура была положительной, а когда отрицательной, когда она росла, а когда понижалась; можно получить и другую полезную информацию: например, когда температура менялась быстрее, а когда медленнее.



С 0 до 2 ч и после 10 ч температура была положительной, так как на этих промежутках график расположен выше оси абсцисс.

С 2 до 10 ч температура была отрицательной, так как на этом промежутке график лежит ниже оси абсцисс.

С 6 до 16 ч температура росла, так как на этом промежутке график идет вверх, а с 0 до 6 ч, с 16 до 20 ч и с 22 до 24 ч температура понижалась (график идет вниз). С 20 до 22 ч температура не менялась.

По графику видно, что самая высокая температура за сутки была в 16 ч, а самая низкая — в 6 ч.

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТЬ А как выглядят графики прямой и обратной пропорциональности? Покажем на примере формулы равномерного движения $s = vt$.

Пусть автомобиль едет с постоянной скоростью 60 км/ч, пройденный им путь s прямо пропорционален времени движения t , его можно вычислить по формуле $s = 60t$. График этой зависимости изображен на рисунке 5.38, а.

Пусть расстояние между городами 300 км. Время движения обратно пропорционально скорости движения и вычисляется по формуле $t = \frac{300}{v}$, график этой зависимости изображен на рисунке 5.38, б.

Рис. 5.38

а)

б)

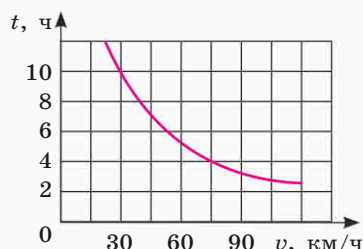
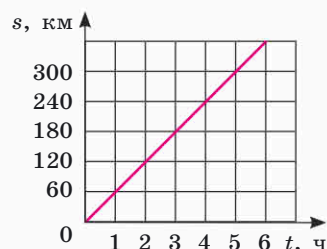
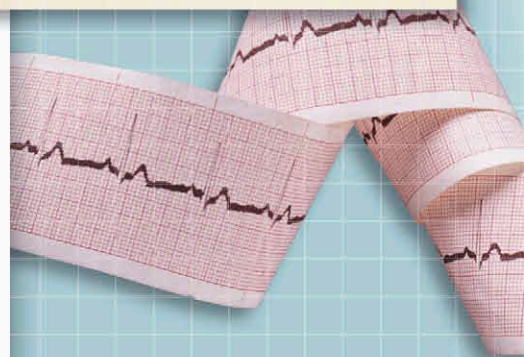


Рис. 5.37

Графики температуры метеорологи получают с помощью специального прибора — термографа, отмечающего температуру на движущейся ленте или на дисплее. Используя показания сейсмографов — приборов, непрерывно фиксирующих колебания почвы и строящих специальные графики — сейсмограммы, геологи могут предсказывать приближение землетрясения или цунами. Врачи выявляют болезни сердца, изучая полученные с помощью кардиографа кардиограммы.



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Ответьте на вопросы по рисунку 5.37:

- Какой была температура в 4 ч? в 12 ч?
- В какое время суток температура равнялась 0°?
- Когда температура понижалась быстрее — с 2 до 4 ч или с 4 до 6 ч?
- Определите наибольшую и наименьшую температуру в течение суток.

УПРАЖНЕНИЯ

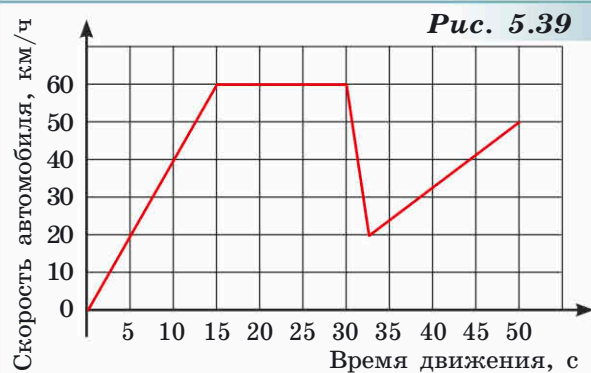
ЧТЕНИЕ РЕАЛЬНЫХ ГРАФИКОВ

385

Отъехав от стоянки, водитель через некоторое время увидел внезапно выбежавшего на дорогу щенка, резко сбросил скорость, а затем продолжил движение, увеличивая скорость. На рисунке 5.39 изображён график скорости движения автомобиля.

С помощью графика ответьте на вопросы:

- Какова была наибольшая скорость автомобиля в течение первых 10 с движения?
- Сколько секунд автомобиль двигался с постоянной скоростью?
- Через сколько секунд после начала движения водитель нажал педаль тормоза?

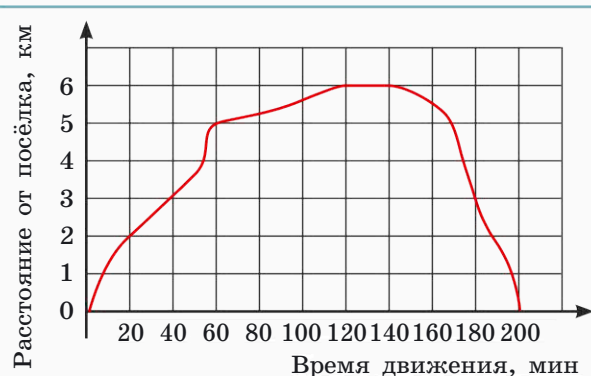


386

Турист поднялся из посёлка на вершину горы и затем вернулся обратно в посёлок. На рисунке 5.40 представлен график движения туриста.

С помощью графика выясните:

- Сколько минут турист пробыл на вершине горы?
- За сколько минут турист прошёл первый километр подъёма? первый километр спуска?
- Сколько километров турист прошёл за первые полчаса пути? за следующий час пути?
- Через сколько минут после начала движения турист был в 2 км от посёлка?
- Какова была средняя скорость туриста (в км/ч) на подъёме? на спуске?

**Рис. 5.40**

387

На тренировке в 50-метровом бассейне пловец проплыл 200-метровую дистанцию. На рисунке 5.41 изображён график зависимости расстояния между пловцом и точкой старта от времени движения пловца.

С помощью графика определите:

- За сколько секунд пловец проплыл первые 50 м?
- Какое расстояние проплыл пловец за стартовые 1 мин 40 с?
- За какое время пловец проплыл дистанцию?
- На каком отрезке дистанции скорость пловца была наибольшей?



388

Во время телевизионных дебатов между участниками А и Б было проведено телефонное голосование телезрителей. На графиках (рис. 5.42) показано, как в течение 60 минут телезрители голосовали за каждого из участников. Используя график, определите:

- Сколько всего телезрителей проголосовало к 10-й минуте опроса?
- Сколько всего телезрителей проголосовало за победившего участника?
- На сколько голосов победитель опередил проигравшего?
- Сколько минут лидировал участник А?

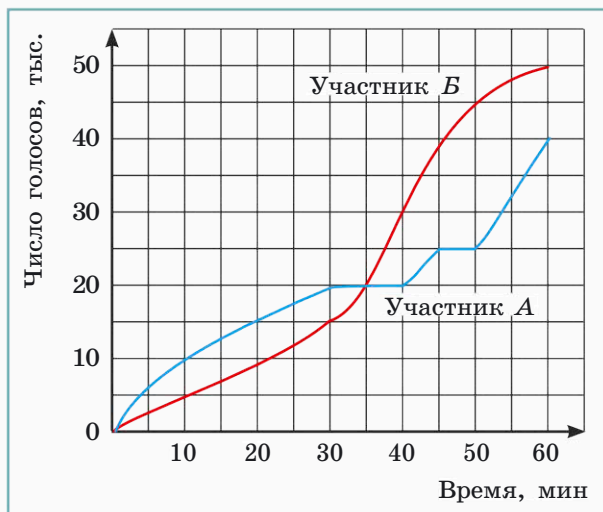


Рис. 5.42

389

Телефонная компания предлагает на выбор две разные схемы начисления ежемесячной платы за разговоры: I схема — без первоначального взноса; II схема — с первоначальным взносом, но с меньшей стоимостью минуты разговора. Для наглядности эти схемы изображены графически (рис. 5.43).

- Чему равен первоначальный взнос по схеме II?
- Сколько придётся заплатить за разговоры продолжительностью 80 мин по схеме I? по схеме II?
- Какой схемой выгоднее воспользоваться при ежемесячных расходах на телефон 200 р.? 400 р.?

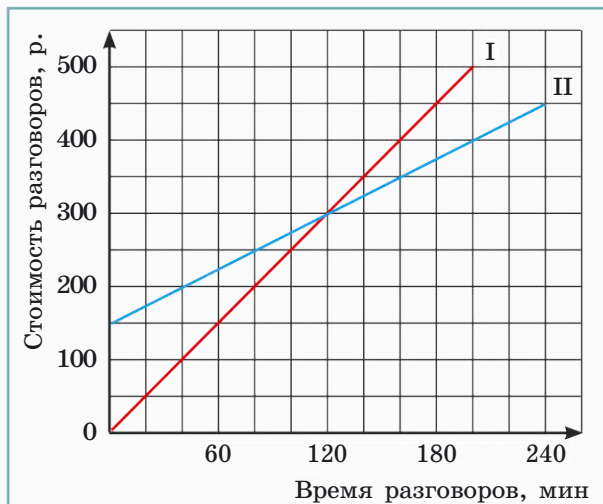


Рис. 5.43

390

В экономических исследованиях часто используется *кривая спроса* — график, который показывает, как зависит спрос на товар от его цены. В таблице представлено соотношение цены за 1 кг яблок и количества яблок, на которое при такой цене предъявлен спрос.

Цена за 1 кг яблок, р.	40	60	80	100	120
Количество яблок, на которое предъявлен спрос, тыс. кг	10	7	4,5	2,5	1

Представьте данные таблицы точками на координатной плоскости и, соединив полученные точки плавной линией, начертите кривую спроса на яблоки.



УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ГРАФИКИ ЗАВИСИМОСТЕЙ,
ЗАДАННЫХ РАВЕНСТВАМИ С МОДУЛЕМ

Вы уже знакомы с графиками зависимостей $y = |x|$ и $|y| = |x|$. Рассмотрите ещё несколько зависимостей, которые задаются равенствами, содержащими знак модуля, и постройте их графики. Если вы знаете, что такое модуль числа и как с ним работать, то вам это будет нетрудно.

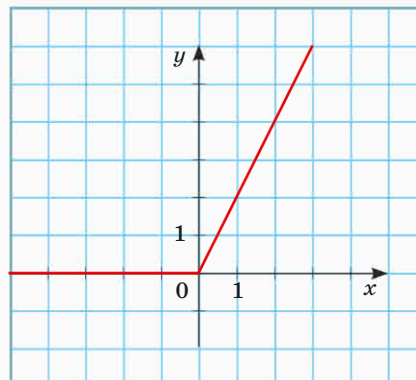
Пример. Построим график зависимости, заданной равенством $y = |x| + x$.

Прежде всего освободимся от знака модуля. Если $x \geq 0$, то $|x| = x$, и тогда данное равенство примет вид $y = 2x$. Если $x < 0$, то $|x| = -x$, и тогда равенство примет вид $y = 0$. Таким образом,

$$y = \begin{cases} 2x & \text{при } x \geq 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Рис. 5.44

Теперь понятно, что график надо строить по частям — отдельно в правой и в левой полуплоскостях. График изображён на рисунке 5.44.



1 Изобразите на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

а) $y = |x| - x$; б) $y = |x| \cdot x$; в) $y = \frac{|x|}{x}$; г) $y = \frac{2x}{|x|}$.

2 Опишите, используя геометрическую терминологию, множество точек, координаты которых удовлетворяют равенству:

а) $|y| = |x|$; б) $|y| = 3$; в) $|x| = 1$.

3 Изобразите на координатной плоскости графики зависимостей:

а) $y = |x| + 2$; б) $y = |x + 2|$.

Опишите их, используя геометрическую терминологию.

4 Установите соответствие между графиками, изображёнными на рисунке 5.45, и задающими их равенствами:

1) $y = |x| + 1$; 2) $y = -|x|$; 3) $y = |x - 1|$.

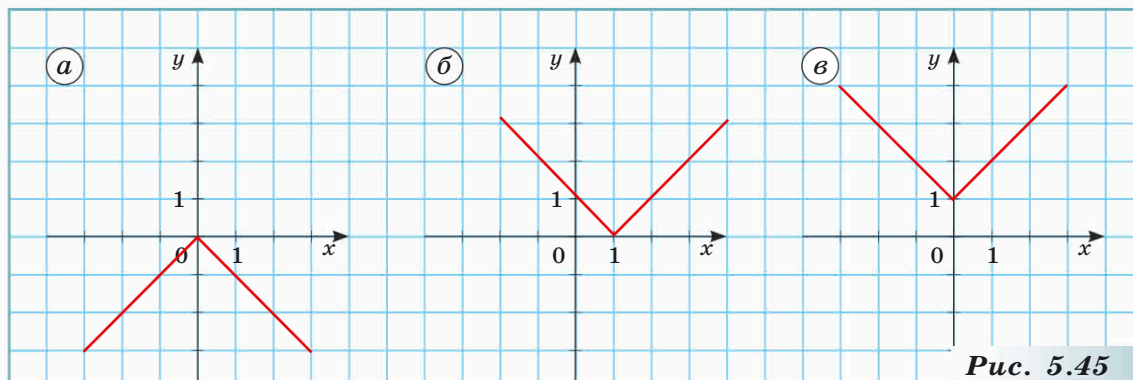


Рис. 5.45

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Числовые промежутки

Открытый луч  $x < a$

Замкнутый луч  $x \leq a$

Отрезок  $a \leq x \leq b$

Интервал  $a < x < b$

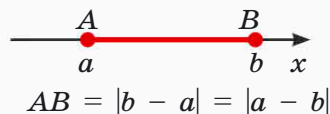
 $x < 5$

 $x \leq 5$

 $2 \leq x \leq 5$

 $2 < x < 5$

Расстояние между двумя точками координатной прямой равно модулю разности их координат.



Если $A(2)$, $B(5)$, то

$$AB = |5 - 2| = 3 \text{ или}$$

$$AB = |2 - 5| = |-3| = 3.$$

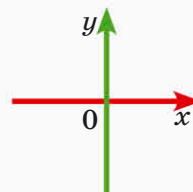
- 1 Изобразите на координатной прямой промежуток:
а) $x > 3$; б) $x \leq -1$; в) $-5 \leq x \leq 2$; г) $0,5 < x < 1,5$.

- 2 На координатной прямой даны точки $A(12)$, $B(-5)$, $C(a)$. На каком расстоянии от точки 0 находится каждая из этих точек?

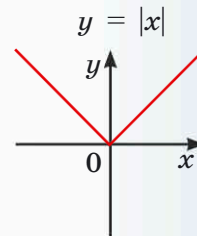
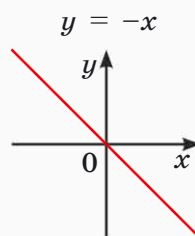
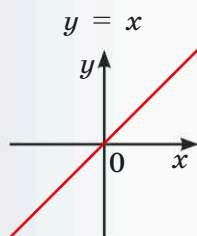
- 3 Найдите расстояние между точками $A(12,4)$ и $B(2,3)$.

Ось ординат задаётся равенством $x = 0$.

Ось абсцисс задаётся равенством $y = 0$.



Графики зависимостей



- 4 Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а) $x = -2$;

в) $x \leq 1$;

д) $1,5 \leq y \leq 3,5$;

б) $y = 4$;

г) $y \geq 0$;

е) $-2 \leq x \leq 1$ и $2 \leq y \leq 4$.

- 5 Каким равенством задаётся биссектриса I и III координатных углов? Каким равенством задаётся биссектриса II и IV координатных углов?

6 Как называется график зависимости $y = x^2$? Укажите координаты нескольких точек, принадлежащих этому графику. Постройте этот график и опишите его свойства.

7 Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих условиям $y = x^2$ и $-2 \leq x \leq 2$.

8 Изобразите на координатной плоскости график зависимости $y = x^3$.

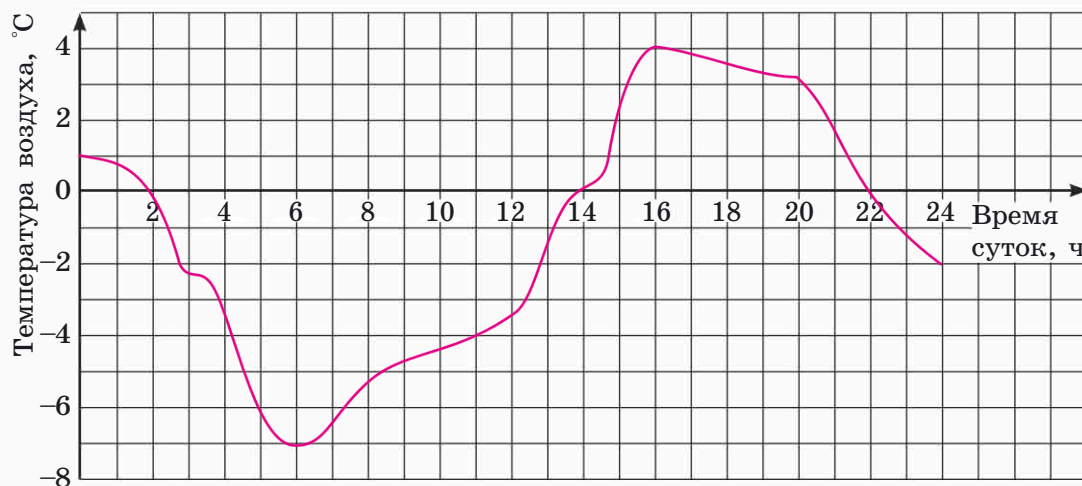
9 Постройте график зависимости:

$$а) y = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 1, \\ 1 & \text{при } x < 1; \end{cases}$$

$$б) y = \begin{cases} x^3 & \text{при } x \geq 0, \\ -x & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

10 На рисунке 5.46 изображён график температуры воздуха 9 апреля 2013 г. в г. Кирове.

Рис. 5.46



- В какое время суток температура была равна 0°C ?
- Когда в течение суток температура была положительной?
- Какова была максимальная температура в этот день?

11 На рисунке 5.47 изображён график движения туриста от турлагеря до станции.

Используя график, ответьте на вопросы:

- Сколько километров прошёл турист за первые 2 часа?
- За сколько часов турист прошёл 16 км?
- Сколько минут турист отдыхал?
- Сколько всего километров прошёл турист?
- Сколько всего часов шёл турист?

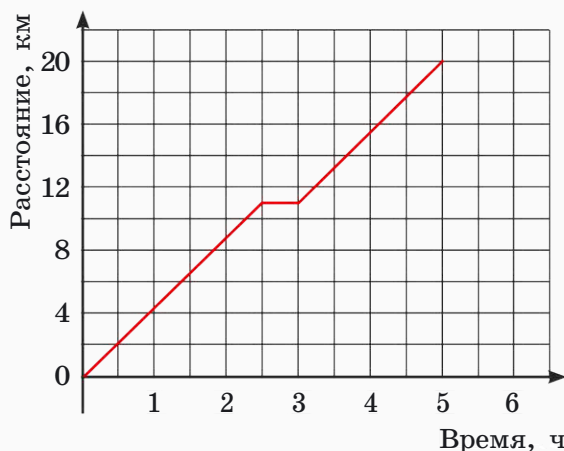


Рис. 5.47

ГЛАВА 6

МНОГОЧЛЕННЫ

- ПРЕОБРАЗОВАНИЕ
ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ
СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМИ
ПОКАЗАТЕЛЯМИ
- ОДНОЧЛЕННЫ
И МНОГОЧЛЕННЫ
- СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ
МНОГОЧЛЕНОВ
- УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ
- ФОРМУЛЫ КВАДРАТА
СУММЫ И КВАДРАТА
РАЗНОСТИ
- РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

Узнайте больше

- ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

ИНТЕРЕСНО

«Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду», — заметил Лев Толстой. В этом высказывании — не только мудрая рекомендация великого русского писателя по решению жизненных задач, но и точное понимание сути подходов к решению алгебраических уравнений. Следовать советам Льва Толстого при решении алгебраических уравнений во многих случаях поможет вам умение оперировать буквенными выражениями.

6.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как умножают и делят степени с одинаковыми основаниями.
- Как возводят в степень произведение, дробь, а также выражение, являющееся степенью.

Европейские математики XV–XVII вв., когда началось активное формирование буквенной символики, для второй и третьей степеней использовали сокращения от слов «квадрат» и «куб», а обозначения следующих степеней «конструировали» на их основе. Так, Франсуа Виет (XVI в.) вторую степень обозначал буквой Q (от лат. *Quadratus* — квадрат), третью — буквой C (от лат. *Cubus* — куб), четвёртую — символом QQ , пятую — символом QC и т. д. А «двухэтажная» запись степени, которая применяется и теперь, в XVII в. была введена Рене Декартом.

Свойства степени с натуральным показателем

- Если a — произвольное число, а m и n — натуральные числа, то $a^m a^n = a^{m+n}$.
- Если $a \neq 0$, а m и n — натуральные числа и $m > n$, то $a^m : a^n = a^{m-n}$.
- Если a — произвольное число, а m и n — натуральные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$.
- Если a и b — произвольные числа, а n — натуральное число, то $(ab)^n = a^n b^n$.
- Если a и b — произвольные числа, но $b \neq 0$, а n — натуральное число, то $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СТЕПЕНИ С НАТУРАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Чтобы преобразовать выражение, содержащее степень с натуральным показателем, достаточно знать определение этого понятия. Упростим, например, выражение $a^3 \cdot (5a)^2$:

$$a^3 \cdot (5a)^2 = (aaa) \cdot (5a \cdot 5a) = 25aaaaa = 25a^5.$$

В то же время в математике есть специальные правила, позволяющие выполнять подобные преобразования проще и быстрее. Эти правила основаны на свойствах степени с натуральным показателем.

УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНЕЙ Возьмём произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, например $a^3 a^4$, и с помощью определения преобразуем его:

$$a^3 a^4 = (\underbrace{aaa}) \cdot (\underbrace{aaaa}) = \underbrace{aaaaaaaa} = a^7 = a^{3+4}.$$

3 раза 4 раза 7 раз

Итак, $a^3 a^4 = a^{3+4}$. Точно так же и в общем случае:

$$a^m a^n = (\underbrace{aa \dots a}) \cdot (\underbrace{aa \dots a}) = \underbrace{aa \dots a} = a^{m+n}.$$

m раз n раз $m + n$ раз

Рассмотренное свойство подсказывает нам следующее правило:



При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складывают, а основание оставляют прежним.

Это правило распространяется и на произведение трёх и более степеней.

Приведём примеры умножения степеней:

$$3^3 \cdot 3^9 = 3^{3+9} = 3^{12}; \quad x^5 x^4 x = x^{5+4+1} = x^{10}.$$



Равенство $a^m a^n = a^{m+n}$, прочитанное справа налево, говорит о том, что степень можно представить в виде произведения степеней с тем же основанием. Например:

$$x^{15} = x^5 x^{10} = x^5 x^5 x^5 = x x^2 x^3 x^4 x^5.$$

Рассмотрим частное степеней с одинаковыми основаниями, например $a^9 : a^5$, где $a \neq 0$. Это частное равно степени с тем же основанием, а именно выражению a^4 . В самом деле, так $a^4 \cdot a^5 = a^9$, то по определению частного $a^9 : a^5 = a^4$, т. е. $a^9 : a^5 = a^{9-5}$.

Так же и в общем случае: если $m > n$ и $a \neq 0$, то

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Докажем это: $a^{m-n} \cdot a^n = a^{(m-n)+n} = a^m$.

Таким образом, приходим к правилу:

При делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя, а основание оставляют прежним.

Это правило применяют при сокращении дробей:

$$\frac{3^{25}}{3^{20}} = 3^{25-20} = 3^5; \quad \frac{2x^8}{x^{12}y} = \frac{2}{x^{12-8}y} = \frac{2}{x^4y}.$$

ВОЗВЕДЕНИЕ СТЕПЕНИ В СТЕПЕНЬ Выражение $(a^2)^4$ — это степень с основанием a^2 . Упростим его, воспользовавшись определением степени и правилом умножения степеней с одинаковыми основаниями:

$$(a^2)^4 = \underbrace{a^2 a^2 a^2 a^2}_{4 \text{ множ.}} = a^{2+2+2+2} = a^{2 \cdot 4} = a^8.$$

Точно так же и в общем случае:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \dots a^m}_{n \text{ множ.}} = a^{m+m+\dots+m} = a^{mn}.$$

При возведении степени в степень показатели степеней перемножают, а основание оставляют прежним.

Например, $(a^5)^2 = a^{5 \cdot 2} = a^{10}$.

ВОЗВЕДЕНИЕ В СТЕПЕНЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО Возьмём, например, выражение $(ab)^3$. Применяв определение степени, получим

$$(ab)^3 = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab)}_{3 \text{ раза}} = \underbrace{(aaa)}_{3 \text{ раза}} \cdot \underbrace{(bbb)}_{3 \text{ раза}} = a^3 b^3.$$

В общем случае

$$(ab)^n = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot \dots \cdot (ab)}_{n \text{ раз}} = \underbrace{(aa \dots a)}_{n \text{ раз}} \cdot \underbrace{(bb \dots b)}_{n \text{ раз}} = a^n b^n.$$

При возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый множитель отдельно и результаты перемножают.

Это свойство справедливо и для произведения трёх и более множителей. Например,

$$(-2xy^2)^3 = (-2)^3 x^3 (y^2)^3 = -8x^3 y^6.$$

Докажите самостоятельно свойство степени, которое выражается равенством $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, где $b \neq 0$.

При умножении степеней и при возведении степени в степень важно не путать, в каком случае показатели складывают, а в каком перемножают. Например,

$$a^3 a^2 = a^{3+2} = a^5, \text{ но} \\ (a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

1) Запишите буквенные равенства, выражающие правила умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями. Проиллюстрируйте их примерами. Докажите одно из них.

2) Представьте выражение a^{20} в виде произведения двух степеней и трёх степеней.

1) Запишите равенство, выражающее правило возведения степени в степень, и докажите его. Приведите иллюстрирующий пример.

2) Представьте выражение a^{20} в виде степени с другим основанием (сделайте это разными способами).

1) Запишите равенства, выражающие правила возведения в степень произведения и дроби. Проиллюстрируйте их примерами.

2) Воспользовавшись равенствами $a^n b^n = (ab)^n$ и $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, представьте в виде степени произведения $8a^3 b^3$ и дробь $\frac{a^4}{16}$.

УПРАЖНЕНИЯ

УМНОЖАЕМ И ДЕЛИМ СТЕПЕНИ

391

Запишите произведение степеней в виде степени с тем же основанием:

- а) x^3x^5 ; б) m^3m ; в) bb^4b^5 ; г) cc^3c ; д) $xx^2x^3x^4$; е) $n^2n^2n^2$.

392

Упростите выражение:

- а) a^2b^3a ; б) $x^3a^2xa^5$; в) xx^4y^2y ; г) $a^2c^4ac^{10}ac$; д) $ab^2c^3a^4b^5c^6$; е) $x^2yzx^2y^5z$.

393

Упростите произведение:

- а) $(-x) \cdot x^2$; б) $(-x)^2 \cdot x$; в) $(-x) \cdot (-x^2)$; г) $(-x) \cdot (-x^2) \cdot (-x)$; д) $-x^2 \cdot (-x)^2 \cdot x$; е) $-(-x)^2 \cdot (-x) \cdot x$.

394

Выполните деление:

- а) $a^7 : a^2$; б) $b^{10} : b^5$; в) $z^9 : z^3$; г) $a^6 : a^2$; д) $c^{30} : c^{10}$; е) $x^{12} : x^4$; ж) $m^{50} : m^2$; з) $y^{100} : y^{10}$.

395

Представьте в виде степени частное степеней:

- а) $\frac{m^9}{m^2}$; б) $\frac{n^{10}}{n^9}$; в) $\frac{c^5}{c}$; г) $\frac{p^{10}}{p^2}$; д) $\frac{a^{18}}{a^8}$; е) $\frac{x^{16}}{x^4}$.

396

Сократите дробь и найдите значение выражения:

- а) $\frac{3^{20}}{3^{18}}$; б) $\frac{2^{31}}{2^{27}}$; в) $\frac{5^4}{5^7}$; г) $\frac{6^{12}}{6^{14}}$; д) $\frac{10^{56}}{10^{50}}$; е) $\frac{2^{100}}{2^{105}}$.

397

Во сколько раз 6^{12} больше, чем 6^{10} ? 5^{118} меньше, чем 5^{121} ?

398

Дана таблица степеней числа 3:

$3^1 = 3$	$3^4 = 81$	$3^7 = 2187$	$3^{10} = 59\,049$
$3^2 = 9$	$3^5 = 243$	$3^8 = 6561$	$3^{11} = 177\,147$
$3^3 = 27$	$3^6 = 729$	$3^9 = 19\,683$	$3^{12} = 531\,441$

1) Пользуясь этой таблицей, найдите значение выражения:

- а) $729 \cdot 81$; б) $2187 \cdot 243$; в) $\frac{177147}{729}$; г) $\frac{59049 \cdot 6561}{2187}$.

2) Составьте ещё несколько выражений, значения которых можно найти, пользуясь таблицей степеней числа 3.

399

Упростите произведение:

- а) $3a^3 \cdot 7a^2$; б) $b^4 \cdot 5b^8$; в) $9x \cdot (-4x^5)$; г) $(-4a^2) \cdot (-5a)$; д) $3c \cdot 5c^2 \cdot 7c^3$; е) $y \cdot 4y^3 \cdot (-2y)$.

400

Упростите выражение:

- а) $\frac{x^5x^5}{x^2}$; б) $\frac{a^{90}a^{10}}{a^{50}}$; в) $\frac{m^{20}}{m^8m^8}$; г) $\frac{y^{30}}{y^{15}y^{10}}$; д) $\frac{b^3bb^7}{b^5b^4}$; е) $\frac{c^{12}c^2c^6}{cc^{10}c^3}$.

Сократите дробь (№ 401–402):

401

- а) $\frac{36a^6}{9a^4}$; б) $\frac{12x^7}{6x^5}$; в) $\frac{xy^3}{y^9}$; г) $\frac{z^5c}{z^7}$; д) $\frac{3y^5}{xy^4}$; е) $\frac{2m^4}{m^5n}$.

402

- а) $\frac{8y^4 \cdot 6y^2}{12y^3}$; б) $\frac{5c \cdot 8c^4}{4c^3}$; в) $\frac{4x \cdot 5x^4}{2x^{10}}$; г) $\frac{15a^2 \cdot 6a^4}{9a^4 \cdot a^3}$.

403

Найдите значение выражения (ответ запишите в виде натурального числа или в виде десятичной дроби):

- а) $(1,3 \cdot 10^3) \cdot (5 \cdot 10^2)$; в) $\frac{3,2 \cdot 10^9}{2 \cdot 10^6}$; д) $\frac{5,4 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^6}$;
 б) $(2,4 \cdot 10^3) \cdot (3 \cdot 10^3)$; г) $\frac{56 \cdot 10^{27}}{2,8 \cdot 10^{25}}$; е) $\frac{3,9 \cdot 10^8}{13 \cdot 10^{10}}$.

404

Сравните значения выражений:

- а) 10^{11} и $11 \cdot 10^{10}$; б) 4^{18} и $5 \cdot 4^{17}$; в) $5 \cdot 10^7$ и $0,5 \cdot 10^8$; г) $4 \cdot 3^{32}$ и 3^{33} .
Образец. Сравним 6^{10} и $5 \cdot 6^9$. Запишем 6^{10} в виде $6 \cdot 6^9$ и сравним произведения $6 \cdot 6^9$ и $5 \cdot 6^9$, каждое из которых содержит два положительных множителя. Так как $6 > 5$, а вторые множители одинаковые, то $6 \cdot 6^9 > 5 \cdot 6^9$, т. е. $6^{10} > 5 \cdot 6^9$.

405

Найдите значение выражения:

- а) $\frac{3^{10} \cdot 3^5}{3^{12}}$; б) $\frac{2^{17}}{2^9 \cdot 2^3}$; в) $\frac{10^9}{1000 \cdot 10\,000}$; г) $\frac{5^7}{25 \cdot 125}$; д) $\frac{64 \cdot 32}{2^{10}}$.

406

Выполните действие (умножение или деление):

- а) $x^n x^5$; в) $c^n c^n$; д) $x^n : x^2$; ж) $x^n : x$;
 б) yu^n ; г) $a^n a^n a$; е) $x^{n+1} : x^n$; з) $x^{n+2} : x^2$.

407

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Население Китая составляет $1,3 \cdot 10^9$ человек, а площадь его территории равна $9,6 \cdot 10^6$ км². Найдите среднее число жителей на 1 км². (Ответ запишите в виде натурального числа, округлив его до десятков.)

ВОЗВОДИМ СТЕПЕНЬ В СТЕПЕНЬ

408

Упростите выражение, применив правило возведения степени в степень:

- а) $(y^5)^3$; в) $(n^8)^3$; д) $2(a^3)^5$; ж) $-4(y^4)^2$;
 б) $(c^{12})^2$; г) $(b^{10})^{10}$; е) $0,3(x^2)^7$; з) $-(c^6)^2$.

409

Представьте каждое выражение в виде степени с основанием c :

- а) $c^5 c^2$, $c^5 : c^2$, $(c^5)^2$, $(c^2)^5$; б) $(c^n)^2$, $c^n \cdot c^2$, $c^n : c^2$, $(c^2)^n$.

410

Упростите выражение:

- а) $a(a^2)^3$; в) $c^2 c^5 (c^2)^5$; д) $(k^{10} k^2)^3$; ж) $\left(\frac{x^7}{x^2}\right)^5$;
 б) $(y^3)^4 y^4$; г) $(x^4 x)^5$; е) $\frac{(a^2)^{10}}{a^{25}}$; з) $\frac{y^{10}}{(y^2)^4}$.

Подсказка. В заданиях г), д) и ж) надо сначала упростить выражение в скобках.

411

Представьте:

- а) выражение a^{30} в виде степени с основанием a^2 , a^3 , a^5 , a^{10} ;
 б) выражение x^{32} в виде степени с основанием x^2 , x^4 , x^8 , x^{16} .

412

1) Упростите каждое из выражений:

$$(-a^3)^2, (-a^2)^3, -(-a^3)^2, -(-a^2)^3, ((-a)^2)^3, ((-a)^3)^2.$$

2) Какие из этих выражений являются равными?

413

1) Представьте каждое из выражений в виде степени с основанием 2:
 4^2 , 4^3 , 8^2 , 8^3 , 16^2 , 16^3 , 32^2 , 32^3 .

2) Какие из этих выражений можно представить в виде степени с основанием -2 ?

3) Можно ли представить в виде степени с основанием -2 выражение 8^5 ; 8^6 ; 16^5 ; 16^6 ?

414

Вычислите:

а) $\frac{5^{12} \cdot (5^4)^2}{(5^5)^4}$; б) $\frac{2^6 \cdot (2^3)^5}{64^4}$; в) $\frac{(3^3)^2 \cdot 27}{81^2}$; г) $\frac{25^6}{(5^3)^3 \cdot 125}$.

415

Выполните действия:

а) $x^n(x^3)^4$, $x^n(x^3)^n$; б) $(x^n)^n$, $x^n x^n$.

ВОЗВОДИМ В СТЕПЕНЬ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ДРОБЬ

416

Выполните возведение в степень:

а) $(xy)^4$; в) $(-10a)^3$; д) $(-cd)^2$; ж) $(-2ac)^4$;
б) $(5n)^2$; г) $(3ax)^3$; е) $(-xyz)^3$; з) $\left(\frac{1}{5}xyz\right)^3$.

417

Выполните действие:

а) $(ab^2)^3$; в) $(2m^3)^2$; д) $(-10a^3)^3$; ж) $(-2a^2x)^5$;
б) $(-x^2y)^4$; г) $(4x^5)^2$; е) $(-6c^3)^2$; з) $(3ac^4)^4$.

418

Возведите данное выражение сначала в квадрат, а потом в куб:

а) $5c^5$; б) $-0,1y^4$; в) $-ab^2$; г) $\frac{1}{3}a^3b$; д) $-0,2a^2c^2$; е) $-\frac{2}{3}x^3y^3$.

419

Восстановите выражение в скобках:

а) $(\dots)^3 = 8x^3$; в) $(\dots)^3 = -27y^3$; д) $0,25a^6 = (\dots)^2$;
б) $(\dots)^2 = 81a^2$; г) $(\dots)^4 = 16c^4$; е) $-\frac{1}{8}b^6 = (\dots)^3$.

420

Можно ли данное выражение представить в виде квадрата некоторого выражения? А в виде куба? В случае утвердительного ответа сделайте это:

а) $-27a^{12}b^6$; б) $a^{18}b^{24}$; в) $-25a^8b^{10}$; г) $0,04a^{20}b^6$.

421

Выполните возведение в степень:

а) $\left(\frac{x}{y}\right)^{10}$; б) $\left(\frac{a}{7}\right)^2$; в) $\left(\frac{2}{c}\right)^4$; г) $\left(-\frac{1}{c}\right)^6$; д) $\left(-\frac{x}{3}\right)^3$.

422

Возведите выражение в степень:

а) $\left(\frac{2x}{5}\right)^2$; в) $\left(\frac{3}{2a}\right)^3$; д) $\left(-\frac{1}{ab}\right)^2$; ж) $\left(-\frac{ab}{c}\right)^5$;
б) $\left(\frac{1}{x^4}\right)^5$; г) $\left(-\frac{y^2}{3}\right)^3$; е) $\left(\frac{x^2y}{2}\right)^4$; з) $\left(-\frac{3a}{4b}\right)^2$.

423

Найдите значение произведения:

а) $5^4 \cdot 2^4$; б) $25^3 \cdot 4^3$; в) $0,2^8 \cdot 5^8$; г) $\left(\frac{4}{7}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^3$; д) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5$; е) $\left(\frac{2}{9}\right)^6 \cdot 4,5^6$.

Образец. Найдём значение произведения $(0,5)^3 \cdot 4^3$. Множители в произведении — это степени с *одинаковыми показателями*. Воспользовавшись формулой $a^n b^n = (ab)^n$, преобразуем произведение $(0,5)^3 \cdot 4^3$ в степень с *тем же показателем*:
 $(0,5)^3 \cdot 4^3 = (0,5 \cdot 4)^3 = 2^3 = 8$.

424

Вычислите значение выражения, воспользовавшись формулой $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$:

а) $\frac{10^3}{2^3}$; б) $100^4 : 50^4$; в) $\frac{3^6}{6^6}$; г) $21^3 : 14^3$; д) $(2,5)^2 : 15^2$.

Неверно!

Среди данных равенств найдите неверные: 1) $a^3 a^3 = a^9$;
2) $(a^2 b^4)^3 = (a^3 b^6)^2$; 3) $2^5 \cdot 5^2 = 10^2$; 4) $a^4 b^6 = (ab^2)^4$;
5) $a \cdot (2a)^2 \cdot (3a)^3 = 108a^6$; 6) $4^3 \cdot 6^3 \cdot 8^3 \cdot 9^3 = 12^9$.

425

Вычислите (сделайте это разными способами):

а) $8^{12} : 2^{30}$; б) $25^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^6$; в) $9^5 : 3^8$; г) $16^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8$.

426

Найдите значение выражения:

а) $\frac{5^2 \cdot 2^4}{10^4}$; б) $\frac{4^3 \cdot 3^8}{6^7}$; в) $\frac{27^3 \cdot 25^5}{15^8}$; г) $\frac{(125 \cdot 49)^3}{35^6}$.

427

Вычислите:

а) $0,25^{40} \cdot 4^{42}$; б) $2^{100} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{103}$; в) $\left(\frac{3}{4}\right)^{50} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{49}$; г) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{24} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{23}$.

428

Разложите на простые множители число, равное произведению:

а) $60 \cdot 108$; б) $96 \cdot 216$; в) $240 \cdot 675$; г) $504 \cdot 945$.

429

Можно ли представить данное произведение в виде степени с показателем, не равным 1? Если можно, то сделайте это:

а) $48 \cdot 162$; б) $504 \cdot 756$; в) $135 \cdot 375$; г) $1008 \cdot 588$.

Образец. Выясним, можно ли представить в виде степени произведение $288 \cdot 18$. Разложим каждое из чисел 288 и 18 на простые множители: $288 = 2^5 \cdot 3^2$ и $18 = 2 \cdot 3^2$. Значит, $288 \cdot 18 = (2^5 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 3^2) = 2^6 \cdot 3^4 = (2^3 \cdot 3^2)^2 = (8 \cdot 9)^2 = 72^2$.

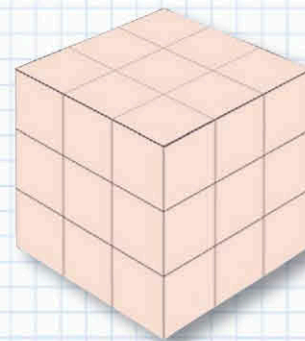
Ответ: можно.

430

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Имеются кубики с рёбрами, равными 3 единицам, 4 единицам, 5 единицам и т. д. Каждый кубик покрасили и разрезали на единичные кубики. Заполните таблицу, ответив для каждого случая на вопросы:

- 1) Сколько получилось единичных кубиков?
- 2) Сколько кубиков, у которых покрашены три грани?
- 3) Сколько кубиков, у которых покрашены две грани?
- 4) Сколько кубиков, у которых покрашена одна грань?
- 5) Сколько получилось кубиков без покрашенных граней?



Длина стороны, ед.	Число единичных кубиков	Число кубиков, у которых			
		покрашены три грани	покрашены две грани	покрашена одна грань	нет покрашенных граней
3					
4					
5					
6					
...					
n					

6.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Какие алгебраические выражения называют одночленами и что такое одночлен стандартного вида.
- Какие алгебраические выражения называют многочленами и что такое многочлен стандартного вида.
- Как соотносятся многочлены и одночлены.

Обозначать степень «двухэтажной» записью, как мы это делаем теперь, начали с XVII в. Однако в XX в. с появлением компьютеров проблема поиска символа для записи степени встала вновь. Дело в том, что в текстах первых компьютерных программ записать степень таким способом было невозможно, и для её обозначения пришлось изобретать новые значки.

Сначала это были две звёздочки (**), используемые в языке Фортран. Позже в языке Алгол стала применяться стрелка.

Язык BASIC предложил символ ^ (циркумфлекс), который оказался наиболее популярным. Его и теперь часто используют при написании математических выражений в текстовых редакторах. Например, вместо 3^2 и 2^3 пишут 3^2 и 2^3 , вместо $((2^4)^3)^2$ пишут $2^4^3^2$.

Но с развитием вычислительной техники появилась возможность набирать степени в привычном для нас виде.

ОДНОЧЛЕНЫ И МНОГОЧЛЕНЫ

В множестве алгебраических выражений выделяется одно важное и интересное подмножество — подмножество многочленов. С помощью многочленов на математическом языке описываются зависимости из самых разных областей знания — математики, физики, биологии, экономики, социальных наук. Важное место многочлены занимают и в школьном курсе математики, и вы будете изучать их достаточно подробно. Но прежде всего надо понять, что означает сам термин «многочлен», а также что такое одночлен.

ОДНОЧЛЕНЫ. СТАНДАРТНЫЙ ВИД ОДНОЧЛЕНА

Рассмотрим выражения $4ac$, $-x^2y$, $\frac{3}{4}b^{10}$, $2a^2b \cdot (-5)b^2c$. Все они составлены из чисел, переменных и их степеней с помощью одного только действия — умножения. Такие выражения называют одночленами.



Одночленом называют произведение, составленное из чисел, переменных и их степеней.

Заметим, что к одночленам относят также числа, переменные и степени переменных. Например, такие выражения, как 28 , x , y^3 , считаются одночленами.

Если в одночлене только один числовой множитель, который записан на первом месте, и каждая переменная (в соответствующей степени) содержится в нём тоже только один раз, то такой одночлен называют **одночленом стандартного вида**. Так, среди выражений, указанных выше, первые три — одночлены стандартного вида.

Числа, переменные и их степени также считают одночленами стандартного вида. Например, выражения 28 , x , y^3 — это одночлены стандартного вида.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена**. Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}b^{10}$ равен $\frac{3}{4}$, а коэффициент одночлена $-x^2y$ равен -1 .

Любой одночлен можно привести к стандартному виду. Для этого нужно:

- сгруппировать по отдельности числовые и буквенные множители;
- вычислить произведение числовых множителей и записать его на первом месте;
- упростить произведение буквенных множителей, применив соответствующие свойства степени.

Пример 1. Представим одночлен $2a^2b \cdot (-5)b^2c$ в стандартном виде:

$$2a^2b \cdot (-5)b^2c = 2 \cdot (-5)a^2bb^2c = -10a^2b^3c.$$



Обратите внимание: мы расположили переменные в алфавитном порядке; так обычно поступают при приведении одночлена к стандартному виду.

МНОГОЧЛЕНЫ. СТАНДАРТНЫЙ ВИД МНОГОЧЛЕНА Рассмотрим теперь такие выражения:

$$a^3 - 2a^2 + 2, \quad 5b - c, \quad 3xy - y + 4x - 7.$$

Каждое из них составлено из одночленов, соединённых знаками «+» или «-». Такие выражения называют многочленами.



Многочленом называют алгебраическую сумму одночленов.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют *членами многочлена*.

Одночлен принято считать многочленом, состоящим из одного члена; иными словами, одночлены рассматривают как частный случай многочленов.

Многочлены, состоящие из двух или трёх членов, имеют специальные названия — *двучлен* и *трёхчлен* соответственно. Так, выражение $5b - c$ — это двучлен, а выражение $a^3 - 2a^2 + 2$ — это трёхчлен.

Если все члены многочлена — одночлены стандартного вида и среди них нет подобных членов, то такой многочлен называют **многочленом стандартного вида**.

Пример 2. Представим в стандартном виде многочлен $3ab - a^2 + b - 2ab + 5b$.

Для этого достаточно в данной сумме привести подобные слагаемые, или, как говорят, *привести подобные члены многочлена*. Получим

$$\underline{3ab} - a^2 + \underline{b} - \underline{2ab} + \underline{5b} = ab - a^2 + 6b.$$

МНОГОЧЛЕНЫ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ Многочлены с одной переменной играют в математике особую роль. Члены многочлена с одной переменной, записанного в стандартном виде, обычно располагают в порядке убывания степеней переменной. При этом *свободный член многочлена*, т. е. член, не содержащий буквы, помещают на последнем месте.

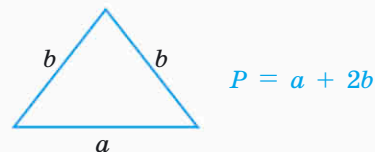
Например, многочлен $5x^2 - 1 - x^3 + 4x$ записывают так: $-x^3 + 5x^2 + 4x - 1$.

Наибольший показатель степени, в которой переменная входит в этот многочлен, равен 3. Говорят, что $-x^3 + 5x^2 + 4x - 1$ — *многочлен третьей степени*. Точно так же о многочлене $2x^4 - x^2 + 5$ говорят, что это *многочлен четвёртой степени*.

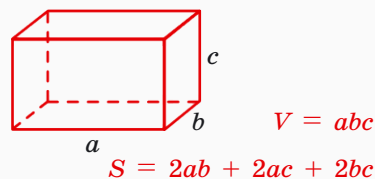


Одночлены и многочлены в формулах

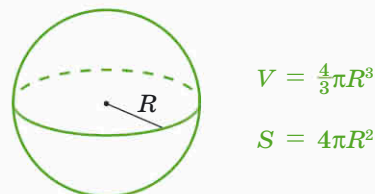
Периметр равнобедренного треугольника



Объём и площадь поверхности параллелепипеда



Объём и площадь поверхности шара



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Какие из следующих выражений являются одночленами:

- 1) abc ; 3) $\frac{1}{3}a^3b^2c$; 5) $-a$;
- 2) $ab + c$; 4) $\frac{ab}{c}$; 6) $10?$

На примере выражения $6x^3y \cdot (-0,4xy^2)$

объясните, как одночлен приводят к стандартному виду.

Перечислите члены многочлена $8x^3 - 5x^2y + xy - y$ и назовите их коэффициенты.

На примере выражения $5xy^2 - x^2y - 2xy \cdot 3y + 3x^2y$ объясните, как многочлен приводят к стандартному виду.

УПРАЖНЕНИЯ

РАБОТАЕМ С ОДНОЧЛЕНАМИ

431

Найдите значение одночлена:

а) $81a^3$ при $a = -\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}a^2c$ при $a = -0,3$, $c = \frac{1}{6}$.

Представьте произведение в виде одночлена стандартного вида (№ 432–434):

432

а) $4xy \cdot 3yx$; в) $10a^2b \cdot 0,1b$; д) $-c^2d \cdot 2c^3d^2$; ж) $-x^2(-xy)y^2$;
б) $\frac{1}{6}ac \cdot (-2)ca$; г) $-n \cdot 4m^3n^2$; е) $x^2y^5 \cdot (-\frac{2}{3}x^3y)$; з) $-2a^2 \cdot (-0,5ac^3)$.

433

а) $0,5yz \cdot 4xzy$; в) $a^2xy \cdot 6ayx^2$; д) $-0,5bd^2 \cdot (-5bc^2)$;
б) $0,2ab^3c \cdot 16a^3bc^3$; г) $5ac^4 \cdot (-0,3c^2d)$; е) $(-0,4xy) \cdot (-10xz)$.

434

а) $3x \cdot (2x)^3$; в) $(-a)^3 \cdot 6a^2$; д) $-2a \cdot (ab^2)^2$; ж) $0,01a \cdot (-10a)^3$;
б) $(-c)^2 \cdot (-4c)$; г) $-5x^4 \cdot (-x)^3$; е) $(-b)^3 \cdot 5a^2b$; з) $(-2a^3)^2 \cdot 5ax^3$.

435

Представьте каждое выражение в виде произведения двух одночленов стандартного вида, один из которых равен $10xy^2$:1) $60x^3y^3$; 2) $-20x^3y^2$; 3) $-5x^6y^5$; 4) $-x^{10}y^8$.

436

Преобразуйте выражение в одночлен стандартного вида:

а) $(a^2b)^2 \cdot (ab^2)^3$; б) $(x^3y)^3 \cdot (xy^2)^3$; в) $(-0,5m^2n)^2 \cdot (4mn^3)^2$; г) $(-yz)^2 \cdot (2zy)^3 \cdot 0,5z$.

РАБОТАЕМ С МНОГОЧЛЕНАМИ

437

Найдите значение многочлена:

а) $6a + 0,5b$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = -2$; б) $0,3x - 0,1y$ при $x = -4$, $y = 10$.

438

Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $12n^2 + 5m - n^2 - 4m$; г) $2a^2b - ab^2 - a^2b + 2ab^2$;
б) $-a^2 - b^2 + 2a^2 - b^2$; д) $mn - 7mn^2 - mn - 7mn^2$;
в) $2m^3 + n^2 - 1 - n^2 + 2m^3$; е) $10xy - xy^2 - 10xy + x^2y$.

439

Найдите значение многочлена:

а) $x^4 + x^3 - xy - x^4 - 3xy$ при $x = 0,2$, $y = 0,1$;
б) $xy^2 - x^2y + 2x - y - x^2y - xy^2$ при $x = -0,5$, $y = 3$.

440

1) Двузначное число, в котором a десятков и b единиц, можно записать в виде многочлена $10a + b$. Запишите в виде многочлена трёхзначное число, в котором: a сотен, b десятков, c единиц; a сотен, a десятков, b единиц; a сотен, b десятков, b единиц.

2) Докажите, что:

а) двузначное число, обе цифры которого одинаковы, делится на 11;
б) трёхзначное число, все цифры которого одинаковы, не делится на 11, но делится на 37.

441

Докажите, что многочлен $a^2 + b^2 + 10$ при любых значениях переменных a и b принимает положительное значение. Чему равно наименьшее значение этого многочлена?

РАССМАТРИВАЕМ МНОГОЧЛЕНЫ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

442

Запишите многочлен, расположив его члены по убыванию степеней переменной, и укажите его степень:

а) $x - x^2 + 1 - x^3$; б) $19z^2 - 8z + z^4 - 7 - 3z^3$; в) $2y^3 + 5y^2 - 3y^4 + y^5 - 1$.

443

Найдите значение многочлена $y^4 + 2y^2 - 5y + 1$:

а) при $y = -1$; б) при $y = 1$; в) при $y = 0$; г) при $y = 5$; д) при $y = -5$.

444

Представьте многочлен в стандартном виде:

а) $0,5c^4 + 0,3c^2 + c^3 - 0,5c^2$;

г) $\frac{1}{2}m^5 - \frac{1}{4}m^3 + m^3 - \frac{3}{4}m^5$;

б) $1,4z^3 - 0,1z^2 - 0,4z^3 + z^2$;

д) $\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x^3 - x + \frac{2}{3}x^3 - x^3$;

в) $a^2 + a + \frac{1}{4}a^2 - a$;

е) $\frac{2}{5}b^2 + b - \frac{3}{5}b^2 + \frac{1}{4}b$.

445

Дан многочлен $2a^4 - 3a^3 - a^2 - 5a - 1$. Подставьте вместо переменной a заданное выражение и приведите многочлен к стандартному виду:

а) $2x$; б) $-x$; в) $3x^2$; г) $-2x^3$; д) $0,1x^4$; е) $-0,2x^5$.

446

В математике есть формулы, с помощью которых можно вычислить сумму первых n натуральных чисел, сумму квадратов первых n натуральных чисел, сумму кубов первых n натуральных чисел:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n;$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n;$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2.$$

Используя формулы, вычислите:

1) $1 + 2 + 3 + \dots + 80$;

3) $1^3 + 2^3 + \dots + 20^3$;

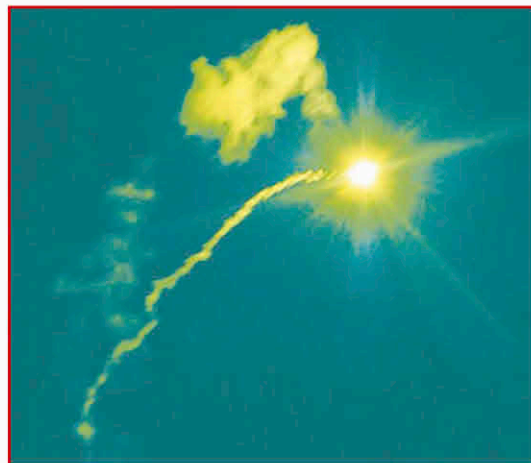
2) $1^2 + 2^2 + \dots + 40^2$;

4) $(1^2 + 2^2 + \dots + 30^2) - (1 + 2 + \dots + 20)$.

447

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

Сигнальная ракета выпущена под углом 45° к горизонту с начальной скоростью 30 м/с. При этих начальных условиях высоту h (в метрах), на которой находится ракета, можно вычислить по формуле $h = 2 + 21t - 5t^2$, где t — время полёта (в секундах). Когда ракета окажется выше — через 2 с или через 4 с после запуска? Подберите с точностью до десятой доли секунды момент времени, когда ракета окажется на максимальной высоте. (Используйте калькулятор.)



6.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Правила, по которым складывают и вычитают многочлены.
- Что сложение и вычитание многочленов можно выполнять в столбик.
- Как записать многочлен, противоположный данному многочлену, и как убедиться, что два многочлена противоположны.

У слова «многочлен» есть синоним — «полином» (от греч. *polys* — многой, многочисленный, обширный — и лат. *poten* — имя). В настоящее время слово «полином» употребляется в математике редко. Но в обычном языке есть много сложных слов, частью которых является приставка *поли-*, указывающая на разнообразный состав или всесторонний охват чего-либо. Это, например, слово «поликлиника». Приведите ещё примеры подобных слов.

Для краткой записи двузначного числа, в котором a десятков и b единиц, принято обозначение $\overline{ab}$, т. е.

$$\overline{ab} = 10a + b.$$

Задача. Докажем, что сумма чисел $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ делится на 11.

Решение. $\overline{ab} + \overline{ba} =$
 $= (10a + b) + (10b + a) =$
 $= \underline{10a} + \underline{b} + \underline{10b} + \underline{a} =$
 $= 11a + 11b.$

В сумме $11a + 11b$ каждое слагаемое делится на 11, значит, и равная ей сумма $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

С многочленами, как и с числами, можно выполнять арифметические действия. Проще всего многочлены складывать и вычитать. Для этого достаточно уметь раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «+» или знак «-», и приводить подобные слагаемые.

СЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ Чтобы сложить многочлены, нужно составить их сумму, раскрыть скобки и, если возможно, упростить получившееся выражение.

Пример 1. Сложим многочлены $2x^2 - 2xy + y^2$ и $3xy - y^2$:

$$\begin{aligned} (2x^2 - 2xy + y^2) + (3xy - y^2) &= \\ = 2x^2 - \underline{2xy} + \underline{y^2} + \underline{3xy} - \underline{y^2} &= 2x^2 + xy. \end{aligned}$$

Таким образом, суммой многочленов $2x^2 - 2xy + y^2$ и $3xy - y^2$ является многочлен $2x^2 + xy$.

ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ Чтобы из одного многочлена вычесть другой, нужно составить их разность, раскрыть скобки и, если возможно, упростить получившееся выражение.

Пример 2. Вычтем из многочлена $2x^2 - 2xy + y^2$ многочлен $3xy - y^2$:

$$\begin{aligned} (2x^2 - 2xy + y^2) - (3xy - y^2) &= \\ = 2x^2 - \underline{2xy} + \underline{y^2} - \underline{3xy} + \underline{y^2} &= 2x^2 - 5xy + 2y^2. \end{aligned}$$

Таким образом, разностью многочленов $2x^2 - 2xy + y^2$ и $3xy - y^2$ является многочлен $2x^2 - 5xy + 2y^2$.

Сумму и разность многочленов всегда можно представить в виде многочлена.



Иногда приходится решать обратную задачу — представлять многочлен в виде суммы или разности многочленов. Пусть требуется представить многочлен $2x^3 - x^2 - x + 1$ в виде разности двучленов. Есть разные способы такого преобразования. Например:

$$2x^3 - x^2 - x + 1 = (2x^3 - x^2) - (x - 1),$$

$$2x^3 - x^2 - x + 1 = (2x^3 - x) - (x^2 - 1),$$

$$2x^3 - x^2 - x + 1 = (1 - x) - (x^2 - 2x^3).$$

Обратите внимание! Если перед скобками ставят знак «-», то знаки членов, заключённых в скобки, меняют на противоположные.

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ Вы знаете, что если перед числом поставить знак «-», то получится число, ему противоположное. Сумма противоположных чисел равна 0: $a + (-a) = 0$.

Мы уже говорили и о том, что точно так же с помощью знака «-» записывается выражение, противоположное данному выражению. Так, выражение, противоположное многочлену $2x - y + 5$, есть $-(2x - y + 5)$. Раскрыв скобки в выражении $-(2x - y + 5)$, получим многочлен $-2x + y - 5$.

Сравните противоположные многочлены

$$2x - y + 5 \text{ и } -2x + y - 5.$$

Вы видите, что их члены различаются только знаками.

! Сумма противоположных многочленов равна нулю.

Проверим это утверждение на примере наших многочленов:

$$(2x - y + 5) + (-2x + y - 5) = \\ = 2x - y + 5 - 2x + y - 5 = 0.$$

Если противоположные многочлены обозначить буквами P и $-P$, то сформулированное утверждение можно записать в виде равенства $P + (-P) = 0$.

СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Действия с многочленами с одной переменной удобно выполнять в столбик, подписывая подобные слагаемые друг под другом.

Пример 3. Найдём сумму и разность многочленов

$$x^3 + 2x^2 + x + 1 \text{ и } x^3 - 2x^2 - x + 1.$$

Рассмотрите, как выполнено сложение и вычитание данных многочленов. Обратите внимание: вычитание мы заменили сложением с многочленом, противоположным второму многочлену. Это сделано для удобства — складывать легче, чем вычитать.

	$x^3 + 2x^2 + x + 1$		$x^3 + 2x^2 + x + 1$
+		+	
	$x^3 - 2x^2 - x + 1$		$-x^3 + 2x^2 + x - 1$
	$2x^3 + 0 + 0 + 2$		$0 + 4x^2 + 2x + 0$

Таким образом:

$$(x^3 + 2x^2 + x + 1) + (x^3 - 2x^2 - x + 1) = 2x^3 + 2,$$

$$(x^3 + 2x^2 + x + 1) - (x^3 - 2x^2 - x + 1) = 4x^2 + 2x.$$



Чтобы записать многочлен $-P$, противоположный многочлену P , достаточно поменять у всех членов многочлена P знаки на противоположные. Например:

P	$-P$
$a - b$	$b - a$
$a + b$	$-a - b$
$-a + b - c$	$a - b + c$

Соответственные значения противоположных многочленов — числа противоположные. Например:

при $a = 10$ и $b = 15$

$$a - b = -5, \text{ а } b - a = 5;$$

при $a = -8, b = -4, c = -2$

$$-a + b - c = 6, \text{ а }$$

$$a - b + c = -6.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● На примере двучленов $x + y$ и $x - y$ объясните, как складывают и вычитают многочлены. Найдите их сумму, разность первого и второго двучленов, а также разность второго и первого двучленов.

● Какой из многочленов $-x + y + z$ или $-x - y + z$ противоположен трёхчлену $x + y - z$?

● Даны многочлены:

$$P = x^3 - 3x^2 - 2x + 5 \text{ и}$$

$$Q = 4x^2 - x + 5.$$

Найдите сумму $P + Q$ и разность $P - Q$, выполнив действия в столбик.

УПРАЖНЕНИЯ

СКЛАДЫВАЕМ И ВЫЧИТАЕМ МНОГОЧЛЕНЫ

448

- а) Составьте сумму многочленов $2xy - 3x + y$ и $xy + 4x - 2y$ и преобразуйте её в многочлен стандартного вида.
 б) Составьте разность многочленов $a^2 - 5ab$ и $b^2 - 6ab + 10$ и преобразуйте её в многочлен стандартного вида.

Выполните сложение (№ 449–450):

449

- а) $(3a^2 - 2a) + (-a^2 + 3a)$; в) $(14mn - 15m) + (mn + 14m)$;
 б) $(6c^2 - 2cd) + (10c^2 + 18cd)$; г) $(3a^2 - 7b^2) + (6b^2 - 2a^2)$.

450

- а) $(5x - y - 4z) + (6y - 5x + 3z)$; в) $(x^2 - 3x) + (4x - 5) + (2x^2 - 5)$;
 б) $(ac - a - c) + (ac + a + c)$; г) $(2a^2 + 5a) + (a - a^2) + (a^2 - 3a - 5)$.

Выполните вычитание (№ 451–452):

451

- а) $(7x + y) - (-x - 2y)$; в) $(x^2 - 3x) - (2x + 1)$;
 б) $(b - 3) - (2b + 2)$; г) $(5b^2 + 2b) - (4b^2 - 3b)$.

452

- а) $(10a - 2b + 5c) - (5a + 2b - c)$;
 б) $(16m - 11n - 7mn) - (6mn - 10n + 16m)$;
 в) $(c^2 + 3cd - d^2) - (4cd + 5d^2 - 6c^2)$;
 г) $(3b^3 - 2ab + a^3) - (2ab + 3b^3)$.

453

Найдите значение выражения при заданных значениях переменных:

- а) $(x - y) + (y - x) - (x + y)$; $x = -5, y = 3,2$;
 б) $(a + b - c) + (a - b + c) - (a - b - c)$; $a = 1,2, b = -0,8, c = 0,6$;
 в) $(m + n) - (n + p) - (m + p)$; $m = \frac{3}{4}, n = -\frac{1}{3}, p = 4$;
 г) $(m - n) + (n - c) - (m - c)$; $m = \frac{1}{6}, n = \frac{1}{7}, c = \frac{1}{4}$.

454

Найдите многочлен, обозначенный буквой X , если известно, что:

- а) $(3a^2 - 4ab) + X = b^2 + ab$; б) $X - (c^2 - c + 1) = 2c - c^3$.

455

Какой многочлен надо прибавить к трёхчлену $3a^3 - 2a^2 + 1$, чтобы сумма оказалась равной: 10; $5a^3$; -3 ; $a^2 - 5$?

В каждом случае проверьте себя, выполнив сложение.

456

Представьте многочлен в виде суммы и в виде разности двух каких-либо двучленов (проверьте себя, раскрыв мысленно скобки, правильно ли вы выполнили задание):

- а) $a - b - c + d$; б) $m + n - p + q$; в) $x + y - z - t$.

457

Представьте трёхчлен в виде суммы и в виде разности двух каких-либо двучленов:

- а) $x^2 + 3x - 1$; б) $a^2 - 5a + 2$; в) $m^2 + m - 4$; г) $y^2 - y + 10$.

Подсказка. Сначала трёхчлен надо каким-либо способом превратить в многочлен, у которого четыре члена, например:

$$c^2 + 4c - 5 = c^2 + c + 3c - 5 = (c^2 + c) + (3c - 5),$$

$$c^2 + 4c - 5 = c^2 + 4c - 6 + 1 = (c^2 + 1) - (6 - 4c).$$

458

Не меняя ни одного знака, расставьте скобки так, чтобы выполнялось равенство:

- а) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = 2$;
 б) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = -2$;
 в) $x^2 - 3x + 1 - x^2 - 3x - 1 = 0$.

459

1) Прочитайте в рубрике «Записываем решение» на с. 142, что означает запись $\overline{ab}$, и догадайтесь, как следует расшифровать следующие обозначения: $\overline{abc}$, $\overline{cba}$, $\overline{bac}$.

2) Докажите, что каждая из разностей $\overline{ab} - \overline{ba}$ и $\overline{abc} - \overline{acb}$ делится на 9.

ИЗУЧАЕМ ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

460

Запишите многочлен, противоположный многочлену:

- а) $-a - b - c$; б) $x^2 - 2xy + y^2$; в) $ab - ac - bc$; г) $-3x^2 + 2x - 4$.

461

Докажите, что данные многочлены являются противоположными:

- а) $x - y$ и $y - x$; б) $x + y$ и $-x - y$; в) $x + y - z$ и $-x - y + z$.

Подсказка. Покажите, что сумма многочленов равна 0.

462

Докажите, что данные многочлены противоположны, и найдите значение каждого из них при заданных значениях переменных:

- а) $x - y - z$ и $y + z - x$ при $x = 0,3$, $y = -0,2$, $z = -0,1$;
 б) $x^2 + 2x - 1$ и $1 - 2x - x^2$ при $x = -\frac{1}{3}$.

463

Даны выражения:

$$2x - 3y, 2x + 3y, 3y - 2x, -2x - 3y, -(2x - 3y), -(3y - 2x).$$

Найдите среди них пары равных и пары противоположных выражений.

СКЛАДЫВАЕМ И ВЫЧИТАЕМ МНОГОЧЛЕНЫ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Выполняйте действия в столбик (№ 464–466):

464

Найдите $P + Q$, $P - Q$ и $Q - P$, если:

- а) $P = 2x^2 + x - 2$, $Q = 1 + 2x - 2x^2$;
 б) $P = 12 - 5a - 10a^2$, $Q = 10 + 4a - 10a^2$.

465

Представьте в виде многочлена стандартного вида выражения $P - Q + R$ и $P - Q - R$, если $P = 2m^2 - m - 1$, $Q = m^2 - 2m$, $R = m - 1$.

466

Упростите выражение:

- а) $(a - b + c) - (a - b + d) + (a - c + d) - (b - c + d)$;
 б) $(x + y + z - 1) - (x - y + z + 1) + (x - y - z + 1) - (x - y - z - 1)$.

Неверно!

Учитель дал четырём ученикам задание: представить многочлен $x^3 - x^2 - x + 1$ в виде разности двучленов. И получил четыре разных ответа:

- 1) $(x^3 - x^2) - (x + 1)$; 3) $(x^3 + 1) - (x^2 - x)$;
 2) $(x^3 - x) - (x^2 + 1)$; 4) $(1 - x) - (x^2 - x^3)$.

Есть ли среди этих ответов верный?

6.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Правило умножения одночлена на многочлен.
- Правило умножения многочлена на многочлен.

Умножение одночлена на многочлен

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

Умножение многочлена на многочлен

$$(a + b)(c + d) =$$

$$= ac + bc + ad + bd$$

УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

Можно не только складывать и вычитать многочлены, но и выполнять с ними действие умножения. Знакомство с правилом умножения многочленов мы начнём с частного случая — с умножения одночлена на многочлен. Если вы научитесь свободно умножать одночлен на многочлен, то вам нетрудно будет умножить, например, двучлен на двучлен или двучлен на трёхчлен.

УМНОЖЕНИЕ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН Пусть требуется умножить одночлен $3x^2$ на двучлен $2x + 5$. Составим их произведение и раскроем в нём скобки. Вы знаете, что скобки в произведении раскрываются на основе распределительного закона, который выражается равенством $a(b + c) = ab + ac$ и согласно которому произведение заменяется равной ему суммой. Получим

$$3x^2(2x + 5) = 3x^2 \cdot 2x + 3x^2 \cdot 5 = 6x^3 + 15x^2.$$

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Таким образом, произведение $3x^2(2x + 5)$ равно многочлену $6x^3 + 15x^2$.

Распределительный закон справедлив для любого числа слагаемых, и точно так же можно действовать всегда при умножении одночлена на многочлен. Отсюда понятно правило:



Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пример 1. Воспользовавшись правилом умножения одночлена на многочлен, преобразуем в многочлен произведение $-2xy(x - 3y + 5)$:

$$-2xy(x - 3y + 5) = -2xy \cdot x - 2xy \cdot (-3y) - 2xy \cdot 5 =$$

$$= -2x^2y + 6xy^2 - 10xy.$$

Решение можно записать короче, выполнив промежуточные шаги в уме:

$$-2xy(x - 3y + 5) = -2x^2y + 6xy^2 - 10xy.$$



Умножать можно не только одночлен на многочлен, но и многочлен на одночлен. Например:

$$(2y + 3)(-6x) = 2y(-6x) + 3(-6x) = -12xy - 18x.$$

Пример 2. Упростим выражение $8a - 3a(2 - a)$.

Раскроем скобки, воспользовавшись правилом умножения одночлена на многочлен, и затем приведём подобные члены многочлена:

$$8a - 3a(2 - a) = 8a - 6a + 3a^2 = 2a + 3a^2.$$

Пример 3. Решим уравнение $5(x - 3) - 6 = 3(x - 2)$.

Раскроем скобки в обеих частях уравнения, получим

$$5x - 15 - 6 = 3x - 6.$$

Далее будем действовать согласно известному алгоритму решения уравнений:

$$5x - 3x = 15,$$

$$2x = 15,$$

$$x = 7,5.$$

Ответ: 7,5.

УМНОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН Чтобы прийти к правилу умножения многочленов, преобразуем в многочлен произведение $(a + b)(c + d)$.

Обозначим двучлен $a + b$ какой-нибудь буквой, например буквой x , и раскроем скобки в выражении $x(c + d)$, воспользовавшись правилом умножения одночлена на многочлен:

$$\underbrace{(a + b)}_x(c + d) = x(c + d) = xc + xd.$$

Теперь выполним обратную замену: подставим в выражение $xc + xd$ вместо x двучлен $a + b$. Затем опять раскроем скобки:

$$xc + xd = (a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd.$$

Таким образом,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

Равенство $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$, описывающее способ умножения двучлена на двучлен, подсказывает нам общее правило:

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Умножив двучлен $a + b$ на двучлен $c + d$, мы получили многочлен $ac + bc + ad + bd$. Вообще

Произведение двух многочленов всегда можно представить в виде многочлена.

Пример 4. Умножим трёхчлен $x^2 + 2xy - 5y^2$ на двучлен $2x - 3y$.

Составим произведение этих многочленов и умножим сначала все члены трёхчлена $x^2 + 2xy - 5y^2$ на $2x$, потом на $-3y$, а затем приведём подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} (x^2 + 2xy - 5y^2)(2x - 3y) &= \\ &= 2x^3 + \underline{4x^2y} - \underline{10xy^2} - \underline{3x^2y} - \underline{6xy^2} + 15y^3 = \\ &= 2x^3 + x^2y - 16xy^2 + 15y^3. \end{aligned}$$

Равенство

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$$

для положительных a, b, c и d можно доказать геометрически: площадь прямоугольника со сторонами $a + b$ и $c + d$ равна сумме площадей четырёх прямоугольников со сторонами a и c, b и c, a и d, b и d (рис. 6.1).

Именно так, используя правила вычисления площадей, получали подобные равенства учёные Древней Греции. Алгебра, оперировавшая не числами, а отрезками, площадями, объёмами, т. е. выраженная геометрическим языком, много веков спустя была названа геометрической алгеброй.

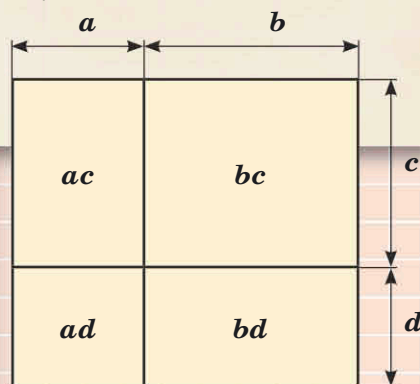


Рис. 6.1

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Проиллюстрируйте правило умножения одночлена на многочлен на примере произведения $6a(2b - c - 10)$.
- Переформулируйте правило умножения одночлена на многочлен для случая, когда многочлен умножают на одночлен. Проиллюстрируйте его на примере произведения $(2x - y) \cdot 3xy$.
- Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен и проиллюстрируйте его на примере произведения $(3a - b)(b + 2a)$.

УПРАЖНЕНИЯ

ПЕРЕМНОЖАЕМ ОДНОЧЛЕН И МНОГОЧЛЕН

Выполните умножение (№ 467–469):

467

- а) $c(2a + b)$;
 б) $-a(3x - y)$;
 в) $2a(-1 - 3b)$;

- г) $(7 - 4x)(-5y)$;
 д) $-3(2a - 5b + 6c)$;
 е) $(a^2 - 4a - 8)(-2)$;

- ж) $(x^2 + xy + y^2)(-4)$;
 з) $6c(a^2 - 2ab + b^2)$;
 и) $-3z(2x^2 - 5xy - 4y^2)$.

468

- а) $-2c(4c + 1)$;
 б) $m(1 - m)$;
 в) $a(3a^2 + a)$;

- г) $4b(2b^3 - 7)$;
 д) $(6c^2 - c + 1)(-5c)$;
 е) $2m(m^2 - 3m + 3)$;

- ж) $(1 - 2c^2 - 3c^3) \cdot 4c^2$;
 з) $-2b^2(6b - 5b^2 + 4b^3)$;
 и) $(-2x^4 - 3x^3 + 4) \cdot 5x^2$.

469

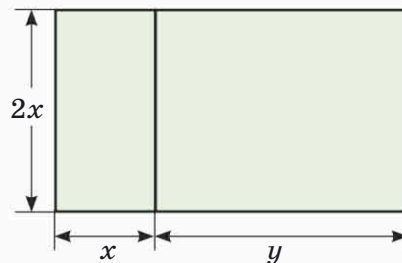
- а) $3ab(a - 2b - 7)$;
 б) $(2x^2 - 5xy + y^2)(-2xy)$;
 в) $(-6a^2 - 7ab - b^2)(-3ab)$;

- г) $0,1b^2(b - ab + 4a^2)$;
 д) $-0,3c^2(4a + 3ac - c^2)$;
 е) $(5m^2 + 10mn - 4n^2)(-0,5mn)$.

470

Найдите двумя способами площадь прямоугольника, изображённого на рисунке 6.2, запишите соответствующее равенство и докажите его алгебраически.

Рис. 6.2



471

Умножение одночлена на многочлен иногда удобно выполнять в столбик:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad \begin{array}{l} -5a^2 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \searrow \\ 3a^3 - a + 4 \end{array} \\
 \hline
 -15a^5 + 5a^3 - 20a^2
 \end{array}$$

Выполните умножение в столбик:

- а) $3n^4(n^2 + 2n - 4)$;
 б) $-2m^3(3m - 2m^2 + m^3)$;
 в) $5xy^2(2x - x^2y - x^3)$;
 г) $-4ac(4a^2 - ac + 2c^3)$.

Упростите выражение (№ 472–473):

472

- а) $a(a + b) - b(a - b)$;
 б) $2(x - 3y) + 3(x - 2y)$;

- в) $6(3a + 4b) - 4(5a - b) + (a - b)$;
 г) $2(x + y) + 4(x - y) - (x + y)$.

473

- а) $3n^2 - n(4n - 6m)$;
 б) $5a + 2a(3a - 2)$;

- в) $3x(x - y) + 3y(x + y)$;
 г) $2x(x - y) - y(y - 2x)$;

- д) $a(a^2 - 1) + a^2(a - 1)$;
 е) $5c^3 - 3c^2(2c - 1)$.

474

Найдите значение выражения:

- а) $x^2(y + x) - x^2(y - x)$ при $x = -2$; б) $4c(c - 2) - (4c^2 - 1)$ при $c = \frac{1}{16}$.

Составьте выражение по условию задачи и преобразуйте его в многочлен (№ 475–476):

475

- а) Чему равна площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна x см, а другая на 3 см больше?
 б) Чему равна площадь прямоугольника, одна из сторон которого равна x см, а другая на a см меньше?

476

- а) Какое расстояние проехал автомобиль, если 4 ч он ехал со скоростью y км/ч, а в следующие 2 ч его скорость была на 10 км/ч больше?
 б) Какое расстояние преодолел турист, если 3 ч он ехал на велосипеде со скоростью a км/ч, затем 1,5 ч шёл пешком со скоростью, на b км/ч меньшей?

Решите уравнение (№ 477–478):

477

- а) $-7x + 5(2x - 3) = 6$; г) $1,8x - 0,6 = 6,2 - 0,4(3x - 1)$;
 б) $5x - 7(3 - x) = 2x + 11$; д) $6x - 3,2 = 7x - 3(2x - 2,5)$;
 в) $0,3 - 2(x + 1) = 0,4x + 0,1$; е) $2,5x - 0,6(3 - 5x) = 5x - 4$.

478

- а) $2(x + 5) - 3(x - 2) = 10$; в) $5(x - 1) - 6x = 12 - 5(3x + 2)$;
 б) $2(5 - x) - 5(2x - 3) = 1$; г) $44 - 10(3 - 4x) = 7(5x + 2)$.

479

Упростите выражение:

- а) $5(a - 2b) - 3(a - b) - 2(a + b) - (3a - 2b)$;
 б) $4(x - y + z) - 2(x + y - z) - 2(x + y + z)$;
 в) $2a^2 - a(2a - 5b) - b(2a - b) - b(a + b)$;
 г) $3x^2 - y(3x - 4y + 1) - x(4x - 3y) - y(1 + 4y)$.

480

Представьте в виде многочлена стандартного вида:

- а) $x(2x^2 - 3x + 1) + 2x(3 + 2x - x^2)$;
 б) $m(m^2 - mn + n^2) - n(m^2 + mn + n^2)$;
 в) $2p(1 - p - 3p^2) - 3p(2 - p - 2p^2)$;
 г) $2c(5a - 3c^2) - c(a - 6c^2) + 3a(a - c)$.

481

Докажите, что:

- а) $a(b - c + d) - b(c - d + a) + c(a + b - d) - d(a + b - c) = 0$;
 б) $xyz(x - 1) - xyz(y - 1) - xyz(z - 1) - xyz - xyz(x - y - z) = 0$.

482

Докажите, что:

- а) значение выражения $4c(3c - 5) + 10(1 + 2c - c^2)$ ни при каком значении переменной c не может быть числом отрицательным;
 б) выражение $7a^2 - 2a(3a - b) - b(2a + b) + (b^2 - a^2 + 5)$ при любых значениях переменных a и b принимает одно и то же значение.

483

Составьте выражение по условию задачи и преобразуйте его в многочлен:

- а) Катер плыл по течению реки 3 ч и против течения 4 ч. Какое расстояние прошёл катер за это время, если собственная скорость катера x км/ч, а скорость течения реки t км/ч?
 б) Лодка отплыла от пристани и плыла по течению реки 2 ч, затем она повернула и плыла ещё 2 ч против течения. Сколько километров она не доплыла до пристани, если её собственная скорость равна v км/ч, а скорость течения реки a км/ч? Зависит ли ответ этой задачи от собственной скорости лодки?

Неверно!

Ученик, вычисляя значение выражения

$$m^2(1 - m^2) - (12 + m^2) \text{ при } m = -2,$$

получил число 4. Докажите, что его ответ неверен. Сделайте это, не выполняя вычислений.

ПЕРЕМНОЖАЕМ МНОГОЧЛЕНЫ

Представьте произведение двучленов в виде многочлена (№ 484–485):

484

- а) $(c + 8)(c + 2)$; г) $(y - 5)(y + 6)$; ж) $(4n + 7)(2n - 3)$;
 б) $(b + 5)(b - 2)$; д) $(2m + 1)(2m + 5)$; з) $(y - 4)(3y - 4)$;
 в) $(m - 11)(m - 2)$; е) $(5m - 1)(m + 1)$; и) $(2 - 3a)(1 + 4a)$.

485

- а) $(a + b)(2a + 3b)$; в) $(a + 3c)(2c - a)$; д) $(4m + 3n)(4m + 3n)$;
 б) $(2x - y)(x + y)$; г) $(5x - c)(5c - x)$; е) $(3y - 2x)(3y + 2x)$.

486

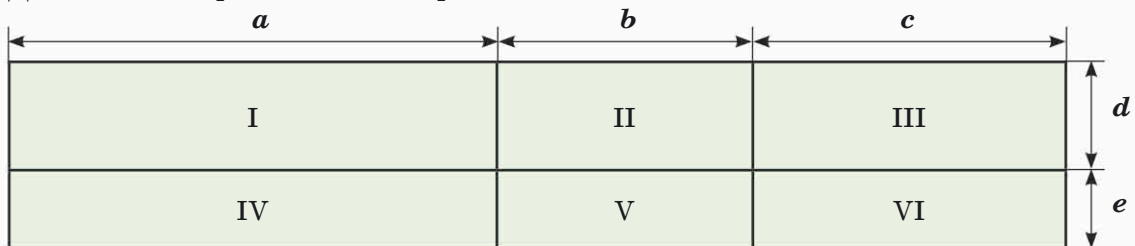
Запишите степень двучлена в виде произведения и выполните умножение:

- а) $(x + y)^2$; б) $(a - b)^2$; в) $(m + 2)^2$; г) $(1 - c)^2$; д) $(2x - y)^2$.

487

Используя рисунок 6.3, дайте геометрическое истолкование равенства
 $(a + b + c)(d + e) = ad + bd + cd + ae + be + ce$.

Докажите это равенство алгебраически.



488

Представьте в виде многочлена:

- а) $(y - 1)(y^2 + 2y - 1)$; г) $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$;
 б) $(z^2 + 3z + 2)(z - 5)$; д) $(4x^2 + 2xy - y^2)(2x - y)$;
 в) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; е) $(a + 3c)(2a^2 - 6ac + 9c^2)$.

Рис. 6.3

489

Представьте в виде многочлена стандартного вида:

- а) $(x - 2)(x + 3) - (2x^2 - 10)$; г) $(y + 10)(y - 2) - 4y(2 - 3y)$;
 б) $(a^2 + a) - (a + 4)(a - 5)$; д) $(2b - 3)(3b + 2) - 3b(2b + 3)$;
 в) $c(c + 3) + (2 - c)(c + 6)$; е) $(3a - 1)(2a - 3) - 2a(3a + 5)$.

490

Найдите значение выражения при заданном значении переменной:

- а) $(z + 2)(z + 3) - z(z + 1)$ при $z = -6,5$;
 б) $(c - 5)(c - 10) + 3c(c + 5)$ при $c = 3,5$;
 в) $(a - 4)(a - 2) - 2a(a - 3)$ при $a = 1,5$.

491

Решите уравнение:

- а) $(x - 2)(x - 3) = x(x + 1)$; в) $(x - 5)(x + 1) - x = x^2 + 5$;
 б) $(x + 4)(x + 6) - x^2 = 30$; г) $(x - 1)(x - 3) = (x - 2)(x - 4)$.

492

Упростите выражение:

- а) $(n + 1)(2n - 3) + (n - 1)(3n + 1)$; в) $(2a + 3)(2a + 3) - (2a + 1)(2a - 1)$;
 б) $(x - y)(2x - 3y) - (3x - y)(2x + y)$; г) $(4c - d)(d + 3c) + (4c - d)(c - 4d)$.

493

Представьте в виде многочлена стандартного вида:

- а) $x^2(x + 5)(x - 3)$; в) $(y + 2)(1 - y)(-3y^3)$;
 б) $2c^2(c - 1)(3 - c)$; г) $-0,5a^2(2a - 3)(4 - a^2)$.

494

1) Умножьте трёхчлен $a + b + c$ на трёхчлен $x + y + z$ и дайте геометрическое истолкование полученного равенства. Сколько членов должен содержать многочлен, равный произведению двух трёхчленов (до приведения подобных членов)?

2) Выполните умножение:

а) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 2x + 1)$;

в) $(y^2 - 3y - 2)(y^2 + 3y - 2)$;

б) $(2t - v + s)(t + 2v - s)$;

г) $(a + 2b + 3c)(2a - b + 2c)$.

Совет. После раскрытия скобок проверьте, получили ли вы нужное число слагаемых, и только потом приводите подобные члены.

495

Докажите, что:

а) если $ab + c^2 = 0$, то

$$(a + c)(b + c) + (a - c)(b - c) = 0;$$

б) если $ab + bc + ac = 0$, то

$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = a^2 + b^2 + c^2.$$

496

1) Разберите, как выполнено преобразование в многочлен произведения

$$\left(\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{2}x\right):$$

$$\frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{1}{8}x^4$$

$$- \text{умножали } \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \text{ на } \frac{1}{4}x^3$$

$$\frac{1}{12}x^5 - \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

$$- \text{умножали } \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \text{ на } \frac{1}{3}x^2$$

$$- \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^2$$

$$- \text{умножали } \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x \text{ на } -\frac{1}{2}x$$

$$\frac{1}{16}x^6 + 0 - \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{16}x^6 - \frac{1}{9}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2$$

2) Воспользовавшись этим образцом, преобразуйте в многочлен произведение:

а) $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)$;

б) $\left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x\right)\left(\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{3}x\right)$.

497

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Рассмотрите примеры преобразования в трёхчлен произведений вида $(x + a)(x + b)$, где a и b — некоторые числа:

$$(x + 2)(x + 3) = x^2 + 2x + 3x + 2 \cdot 3 = x^2 + 5x + 6;$$

$$(x - 4)(x - 3) = x^2 - 4x - 3x + (-4) \cdot (-3) = x^2 - 7x + 12;$$

$$(x - 5)(x + 4) = x^2 - 5x + 4x + (-5) \cdot 4 = x^2 - x - 20.$$

В каждом случае установите, как связаны числа a и b с коэффициентом при x и свободным членом трёхчлена. Сделайте вывод и вставьте пропущенные слова в предложение:

коэффициент при x равен ____, а свободный член равен ____.

2) Докажите ваш вывод, преобразовав в трёхчлен произведение $(x + a)(x + b)$.

3) Пользуясь полученным буквенным равенством, представьте в виде трёхчлена произведение:

а) $(x + 6)(x + 2)$; б) $(x - 10)(x - 3)$; в) $(x - 2)(x + 8)$.

Проверьте себя, выполнив преобразование по правилу умножения многочлена на многочлен.

6.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Формулы, которые позволяют сокращённо возводить в квадрат сумму и разность двух выражений.
- В каких случаях трёхчлен можно преобразовать в квадрат двучлена.

Утверждение, которое выражается формулой квадрата суммы, было известно ещё в древности. Оно описано, например, древнегреческим учёным Евклидом (III в. до н.э.). Доказательство, приведённое Евклидом, вы можете воспроизвести самостоятельно, воспользовавшись **рисунком 6.4**:

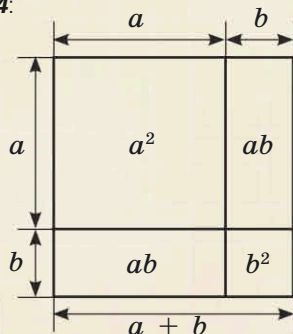


Рис. 6.4

Геометрическое доказательство формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для положительных a и b можно провести с помощью рисунка 6.5:

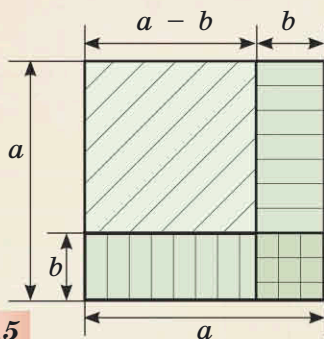


Рис. 6.5

ФОРМУЛЫ КВАДРАТА СУММЫ И КВАДРАТА РАЗНОСТИ

При умножении многочленов встречается несколько особых случаев, знание которых очень полезно. Это, в частности, умножение двучлена на самого себя, т. е. возведение двучлена в квадрат.

ФОРМУЛА КВАДРАТА СУММЫ Преобразуем в многочлен выражение $(a+b)^2$. Для этого запишем его в виде произведения $(a+b)(a+b)$ и воспользуемся правилом умножения многочлена на многочлен:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Равенство $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ называют **формулой квадрата суммы**. Словами эту формулу обычно читают так:

Квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

С помощью формулы $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можно возводить в квадрат сумму любых двух выражений.

Пример 1. Возведём в квадрат сумму $2x + 5y$, получим $(2x + 5y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5y + (5y)^2 = 4x^2 + 20xy + 25y^2$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

ФОРМУЛА КВАДРАТА РАЗНОСТИ Преобразуем в многочлен выражение $(a-b)^2$:

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Равенство $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ называют **формулой квадрата разности**. Читают формулу квадрата разности так:

Квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

С помощью формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ можно преобразовать в многочлен квадрат разности любых выражений.

Пример 2. Преобразуем в многочлен выражение $(x - 0,5c)^2$:

$$(x - 0,5c)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 0,5c + (0,5c)^2 = x^2 - xc + 0,25c^2.$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$$



Обратите внимание: результатом возведения двучлена в квадрат является трёхчлен. Формулы квадрата суммы и квадрата разности позволяют получать этот трёхчлен сразу, не прибегая к правилу умножения многочленов. Поэтому эти формулы называют **формулами сокращённого умножения**.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРЁХЧЛЕНА В КВАДРАТ ДВУЧЛЕНА Поменяем местами в формулах квадрата суммы и квадрата разности левые и правые части. Получим

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Эти равенства говорят о том, что если трёхчлен имеет вид $a^2 + 2ab + b^2$ или $a^2 - 2ab + b^2$, то он равен квадрату некоторого двучлена.

Пример 3. Выясним, можно ли представить в виде квадрата двучлена трёхчлен $x^2 - 10x + 25$.

Первый член трёхчлена — это x^2 , произведение $10x$ можно записать в виде $2 \cdot x \cdot 5$, а число 25 — это 5^2 . Поэтому

$$x^2 - 10x + 25 = \underbrace{x^2}_{a^2} - \underbrace{2 \cdot x \cdot 5}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{5^2}_{b^2} = (x - 5)^2.$$

Или иначе:

$$x^2 - 10x + 25 = \underbrace{5^2}_{a^2} - \underbrace{2 \cdot 5 \cdot x}_{2 \cdot a \cdot b} + \underbrace{x^2}_{b^2} = (5 - x)^2.$$

Таким образом, трёхчлен $x^2 - 10x + 25$ можно представить в виде квадрата двучлена двумя способами:

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 \text{ и } x^2 - 10x + 25 = (5 - x)^2.$$

Заметим, что второе равенство можно получить из первого таким рассуждением: значения выражений $x - 5$ и $5 - x$ при любом x — числа противоположные, а квадраты противоположных чисел равны. Значит,

$$x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = (5 - x)^2.$$

Пример 4. Возьмём трёхчлен $a^2 + 6a + 10$. Очевидно, что в квадрат двучлена его «свернуть» нельзя. Однако этот трёхчлен можно представить в виде суммы, в которой одно из слагаемых является квадратом двучлена, или, как говорят, *выделить из трёхчлена квадрат двучлена*:

$$a^2 + 6a + 10 = (a^2 + 6a + 9) + 1 = (a + 3)^2 + 1.$$

Такая запись позволяет получить о данном трёхчлене полезную информацию:

- при любом значении a трёхчлен $a^2 + 6a + 10$ принимает положительное значение;
- наименьшее значение, равное 1, трёхчлен $a^2 + 6a + 10$ принимает при $a = -3$.

Докажите эти утверждения.



Формулу квадрата разности можно получить как следствие формулы квадрата суммы. В самом деле:

$$a - b = a + (-b),$$

поэтому

$$\begin{aligned} (a - b)^2 &= (a + (-b))^2 = \\ &= a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = \\ &= a^2 - 2ab + b^2. \end{aligned}$$



Два варианта представления трёхчлена

$$a^2 - 2ab + b^2$$

в виде квадрата двучлена:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Запишите формулу квадрата суммы, докажите её и дайте словесную формулировку.

● Запишите формулу квадрата разности, докажите её и дайте словесную формулировку.

● Можно ли «свернуть» в квадрат двучлена следующие трёхчлены:

1) $x^2 + 6xy + 3y^2$;

2) $4m^2 - 4m + 1$;

3) $a^2 - 2ab - b^2$?

● Докажите, что $(a - b)^2 = (b - a)^2$. Сделайте это разными способами.

УПРАЖНЕНИЯ

ВОЗВОДИМ ДВУЧЛЕН В КВАДРАТ

498

С помощью формулы квадрата суммы преобразуйте в трёхчлен выражение:

а) $(m + n)^2$;

в) $(3 + b)^2$;

д) $(2 + 3a)^2$;

б) $(c + 1)^2$;

г) $(5y + 1)^2$;

е) $(4 + 6z)^2$.

499

С помощью формулы квадрата разности преобразуйте в трёхчлен выражение:

а) $(x - y)^2$;

в) $(5 - c)^2$;

д) $(3 - 4z)^2$;

б) $(m - 2)^2$;

г) $(2a - 1)^2$;

е) $(4b - 2)^2$.

500

Выполните возведение в квадрат с помощью соответствующей формулы сокращённого умножения:

а) $(2x + 3y)^2$;

г) $(ab + 2)^2$;

ж) $(x - \frac{1}{x})^2$;

б) $(4a - 3b)^2$;

д) $(1 - xz)^2$;

з) $(y + \frac{1}{y})^2$;

в) $(2m + \frac{1}{2}n)^2$;

е) $(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}bc)^2$;

и) $(0,5ac - b)^2$.

501

Преобразуйте в многочлен:

а) $(x^2 + 3)^2$;

в) $(1 - m^3)^2$;

д) $(a^2 - 2b)^2$;

ж) $(2y^2 - 3x^2)^2$;

б) $(a^2 - 2)^2$;

г) $(5 + c^3)^2$;

е) $(x^3 + 3y^3)^2$;

з) $(x^2y^2 + 2)^2$.

502

Заполните пропуски, восстановив пропущенные слагаемые:

а) $(\dots - 2y)^2 = 25 - 20y + 4y^2$;

г) $(\dots + 6b)^2 = \dots + 12ab + 36b^2$;

б) $(3a + \dots)^2 = 9a^2 + \dots + c^2$;

д) $(\dots + 2m)^2 = 4n^2 + \dots + \dots$;

в) $(2x + \dots)^2 = \dots + \dots + y^2$;

е) $(\dots - \dots) = a^2 - \dots + 9$.

503

С помощью формул квадрата суммы и квадрата разности в некоторых случаях можно возводить числа в квадрат, не используя калькулятор и не прибегая к умножению столбиком. Разберите, как, например, выполнено возведение в квадрат чисел 71 и 59:

$$71^2 = (70 + 1)^2 = 70^2 + 2 \cdot 70 \cdot 1 + 1^2 = 4900 + 140 + 1 = 5041;$$

$$59^2 = (60 - 1)^2 = 3600 - 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 - 120 + 1 = 3481.$$

Воспользовавшись рассмотренным приёмом, вычислите:

а) 52^2 ;

б) 98^2 ;

в) 1001^2 ;

г) $9,5^2$;

д) $9,9^2$.

504

1) С помощью формул сокращённого умножения преобразуйте в трёхчлен каждое из выражений:

а) $(-c + 3)^2$, $(-3 + c)^2$, $(-c - 3)^2$;

б) $(-x + y)^2$, $(-y + x)^2$, $(-x - y)^2$.

Образец. Преобразуем в трёхчлен выражения $(-a + 4)^2$ и $(-a - 4)^2$. Воспользуемся тем, что квадраты противоположных выражений равны:

$$(-a + 4)^2 = (a - 4)^2 = a^2 - 8a + 16, \quad (-a - 4)^2 = (a + 4)^2 = a^2 + 8a + 16.$$

2) Рассмотрите выражения:

$(b - a)^2$,

$(b + a)^2$,

$(-b + a)^2$,

$(-a + b)^2$,

$(-a - b)^2$,

$(-b - a)^2$.

Какие из них равны выражению $(a + b)^2$, а какие — выражению $(a - b)^2$?

505

Представьте выражение в виде многочлена стандартного вида:

а) $(c^2 + 5c)^2$;

в) $(2a^2 + 5a)^2$;

д) $(3x^3 - x^2)^2$;

б) $(x - 3x^3)^2$;

г) $(0,5y - 2y^3)^2$;

е) $(10a^2 + 0,1a^3)^2$.

506

Выполните возведение двучлена в квадрат:

а) $(a^n + b^m)^2$; б) $(x^m + x)^2$; в) $(y^n - y^2)^2$.

СВОРАЧИВАЕМ ТРЁХЧЛЕН В КВАДРАТ ДВУЧЛЕНА

507

Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:

а) $y^2 + 10y + 25$;

г) $9n^2 + 12mn + 4m^2$;

ж) $x^4 - 2x^2 + 1$;

б) $4 - 20c + 25c^2$;

д) $4x^2 + 4xy + y^2$;

з) $y^6 + 2y^3 + 1$;

в) $a^2 - 6ab + 9b^2$;

е) $a^2b^2 + 2ab + 1$;

и) $a^4 - 2a^2b + b^2$.

508

Найдите значение трёхчлена:

а) $a^2 - 2a + 1$ при $a = 81$; -19 ; $1,01$; $0,9$;

б) $25c^2 + 70c + 49$ при $c = 0,4$; -2 ; $-1,6$; $-21,4$;

в) $25 - 40x + 16x^2$ при $x = 7,5$; $-2,5$; $6,25$; $1\frac{5}{24}$;

г) $9a^2 + 12ac + 4c^2$ при $a = -4$, $c = 6$; при $a = -\frac{2}{3}$, $c = 7$;
при $a = -0,1$, $c = 0,3$.

Подсказка. «Сверните» трёхчлен в квадрат двучлена.

509

Замените букву k таким выражением, чтобы трёхчлен можно было преобразовать в квадрат двучлена:

а) $a^2 - 2a + k$;

в) $m^2 + k + 16$;

д) $k - 6n + n^2$;

б) $x^2 + 6x + k$;

г) $y^2 + k + 25$;

е) $k + 8ab + b^2$.

510

1) Закончите преобразования, выделив из каждого трёхчлена квадрат двучлена:

$x^2 - 8x + 9 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16 - 16 + 9 = \dots$,

$x^2 - 3x + 3 = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x + \frac{9}{4} - \dots$.

Какой из этих двух трёхчленов принимает только положительные значения?

2) Выделите квадрат двучлена:

а) $x^2 + 6x + 12$;

в) $c^2 + 10c$;

д) $x^2 + 3x - 0,25$;

б) $a^2 - 4a + 1$;

г) $m^2 - 2m$;

е) $a^2 + a + 1$.

ПРИМЕНЯЕМ ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Упростите выражение (№ 511–512):

511

а) $(x + 4)^2 - 7x$;

в) $(1 - c)^2 - (1 - 2c)$;

д) $(x - y)^2 + x(y - x)$;

б) $(a - 3)^2 - 9$;

г) $(4 - a)^2 - (16 + 8a)$;

е) $(a + b)^2 - 2b(a - b)$.

512

а) $(a^2 + b^2) - (a - b)^2$;

г) $3x(x + 2) - (x + 3)^2$;

б) $9x^2 - (y - 3x)^2$;

д) $9b(b - 1) - (3b + 2)^2$;

в) $c(5 - c) + (c - 5)^2$;

е) $6y(y - 2) - (2y - 3)^2$.

513

Преобразуйте выражение в многочлен:

а) $2(a - 3)^2$;

в) $-5(1 - 2c)^2$;

д) $3(a - 1)^2 + 8a$;

б) $3(x + y)^2$;

г) $-4(3m + n)^2$;

е) $9c^2 - 4 - 6(c - 2)^2$.

514

Найдите значение выражения:

а) $(x - 9)^2 - x(x - 10)$ при $x = -0,25$;

б) $(5 + 2x)^2 - 2x(x + 10)$ при $x = 1,5$.

515

Решите уравнение:

а) $(x + 3)^2 - x^2 = 33$;

б) $x^2 - (x - 5)^2 = 10$;

в) $(x + 12)^2 = x(x + 8)$;

г) $x(6 - x) + (x - 4)^2 = 0$;

д) $(x - 3)(x + 1) = (x - 2)^2$;

е) $(x - 4)(x - 3) = (3 - x)^2$.

516

Докажите, что:

а) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$;

б) $(a - b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$;

в) $a(a + b) + b(a + b) = (a + b)^2$;

г) $a(a - b) - b(a - b) = (a - b)^2$;

д) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

е) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.

517

Докажите, что:

а) если к произведению двух последовательных натуральных чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа;

б) если от произведения двух последовательных натуральных чисел отнять меньшее из них, то получится квадрат меньшего числа.

Неверно!

Учитель предложил ученику поставить в соответствие каждому выражению из левого столбца равное ему выражение из правого столбца:

А. $(a + b)^2 + (a - b)^2$

Б. $(a + b)^2 - (a - b)^2$

В. $(b + a)^2 + (b - a)^2$

Г. $(b + a)^2 - (b - a)^2$

1) $2(a^2 + b^2)$

2) $4ab$

Ученик сказал, что это невозможно, так как слева четыре выражения, а справа только два. Прав ли ученик?

518

Упростите выражение:

а) $(y + 2)^2 - 2(y + 1)^2$;

б) $4(2 - x)^2 + (x - 5)^2$;

в) $(b - 4)^2 + (b - 1)(2 - b)$;

г) $(a + 3)(5 - a) - (a - 1)^2$;

д) $(5 + 2y)(y - 3) - (5 - 2y)^2$;

е) $(3 - 5x)^2 - (3x - 2)(5x + 1)$.

519

Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида:

а) $6(a - 2)(a - 3) - 4(a - 3)^2$; б) $10(c + 2)^2 - 2(c + 4)(5 - c)$.

520

Представьте выражение в виде квадрата двучлена:

а) $(2a + 3b)^2 - 8b(2a + b)$;

б) $(3x - 2y)^2 + 5x(4y - x)$;

в) $n(9n - 4m) + 4(m - 2n)^2$.

521

1) Представьте каждое произведение в виде квадрата двучлена или в виде выражения, противоположного квадрату двучлена:

а) $-(x - y)(x - y)$, $(x - y)(y - x)$, $-(x - y)(y - x)$;

б) $-(x + y)(y + x)$, $(x + y)(-x - y)$, $-(x + y)(-x - y)$.

2) С помощью формул сокращённого умножения преобразуйте произведение в многочлен:

а) $(2a - b)(b - 2a)$;

б) $(c + 2d)(-c - 2d)$;

в) $-(a^2 - b)(b - a^2)$;

г) $-(5c + d^2)(-5c - d^2)$.

522

Докажите, что:

- а) $(a - 1)^2 + 2(a - 1) + 1 = a^2$;
 б) $(1 - a)^2 + 2a(1 - a) + a^2 = 1$;
 в) $(a + 1)^2 - 4(a + 1) + 4 = (a - 1)^2$;
 г) $(a + b)^2 + 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = 4a^2$.

Подсказка. Можно раскрыть скобки в левой части равенства и привести подобные члены; если не ошибётесь, получите правую часть равенства. Но есть более короткое и красивое решение. Посмотрите внимательно: выражение в левой части можно «свернуть» в квадрат двучлена.

523

Выведите формулу куба суммы
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Прочитайте эту формулу словами.

Пользуясь формулой куба суммы, преобразуйте в многочлен следующее выражение: а) $(x + y)^3$; б) $(x + 2y)^3$.



Формула куба суммы:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Формула куба разности:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

524

Выведите формулу куба разности
 $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Прочитайте эту формулу словами.

Пользуясь формулой куба разности, преобразуйте в многочлен следующее выражение: а) $(x - y)^3$; б) $(3x - y)^3$.

525

- Дополните равенство: а) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 \dots$; б) $x^2 + y^2 = (x - y)^2 \dots$.
- Вычислите сумму квадратов чисел x и y , зная их сумму и произведение:
 $x + y = 20$, $xy = 96$.
- Вычислите сумму квадратов чисел x и y , зная их разность и произведение:
 $x - y = 12$, $xy = 85$.
- а) Пусть $x + y = p$, а $xy = q$. Выразите $x^2 + y^2$ через p и q .
 б) Пусть $x - y = t$, а $xy = s$. Выразите $x^2 + y^2$ через t и s .

526

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Выведите формулу квадрата трёхчлена, преобразовав выражение $(a + b + c)^2$. Проиллюстрируйте её геометрически с помощью рисунка 6.6. Дайте словесную формулировку формулы.

Подсказка. Чтобы возвести в квадрат выражение $a + b + c$, разбейте его на два слагаемых: $a + b$ и c . Затем воспользуйтесь формулой квадрата суммы: $((a + b) + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + \dots$.

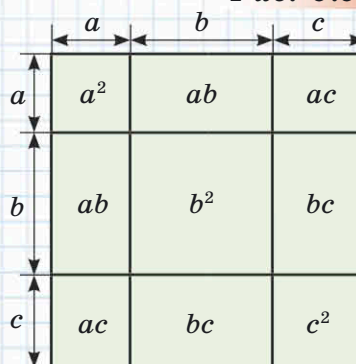
2) По аналогии с формулой, полученной в п. 1, запишите формулу для преобразования в многочлен выражения $(a + b + c + d)^2$. Проиллюстрируйте эту формулу геометрически.

Для самоконтроля. После приведения подобных членов у вас должен получиться многочлен, у которого 10 членов.

3) Пользуясь подходящей формулой, полученной выше, преобразуйте в многочлен следующее выражение:

- а) $(x - y + z)^2$; б) $(x - y - z)^2$; в) $(x + y - z - t)^2$.

Рис. 6.6



6.6

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

Как решают задачи алгебраическим способом.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ УРАВНЕНИЙ

При решении задач арифметическим способом вы часто использовали рисунки, схемы, которые помогали проанализировать условие задачи, составить план работы с её данными. Рисунки помогают также переводить условие задачи на язык уравнений при решении задачи алгебраическим способом.

ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ **Задача 1.** Два туриста вышли одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 22,5 км, и встретились через 3 ч. С какой скоростью шёл каждый из них, если известно, что скорость одного на 1,5 км/ч больше скорости другого?

Пусть скорость первого туриста x км/ч, тогда скорость второго туриста $(x + 1,5)$ км/ч. Каждый турист шёл до встречи 3 ч. Зная скорость и время движения каждого, можно найти расстояние, которое они прошли до встречи: первый турист прошёл $3x$ км, а второй — $3(x + 1,5)$ км.

Сделаем рисунок по условию задачи (рис. 6.7).

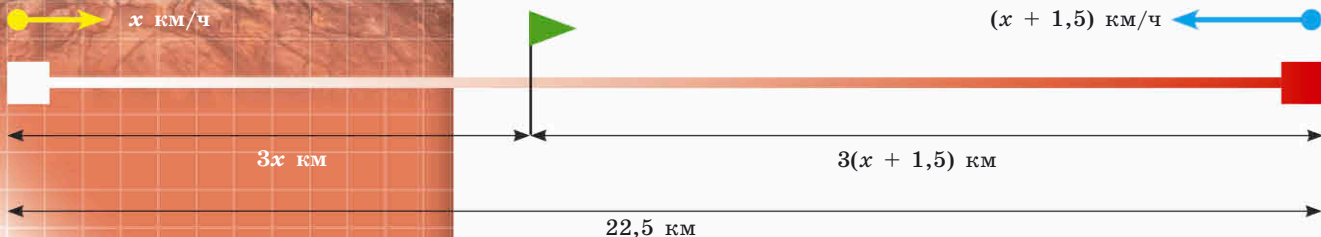


Рис. 6.7

Из рисунка понятно, что в сумме эти расстояния составляют 22,5 км. Имеем уравнение

$$3x + 3(x + 1,5) = 22,5.$$

Решим это уравнение:

$$\begin{aligned} 3x + 3x + 4,5 &= 22,5, \\ 6x &= 18, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Мы выяснили, что первый турист шёл со скоростью 3 км/ч. Найдём скорость второго: $3 + 1,5 = 4,5$ (км/ч).

Ответ: 3 км/ч; 4,5 км/ч.

Задача 2. Оля вышла из дома и пошла в школу со скоростью 60 м/мин. Через 8 мин вслед за ней вышел её старший брат Иван и пошёл той же дорогой к школе со скоростью 100 м/мин. В школу они пришли одновременно. Чему равно расстояние от дома до школы?

Решим задачу двумя способами, обозначив через x разные величины.

Способ 1. Пусть расстояние от дома до школы x м, тогда Оля шла до школы $\frac{x}{60}$ мин, а Иван — $\frac{x}{100}$ мин.

Условие «Через 8 мин вслед за ней вышел её старший брат Иван... В школу они пришли одновременно» означает, что Оля шла в школу на 8 мин дольше, чем Иван.

Имеем уравнение

$$\frac{x}{60} - \frac{x}{100} = 8.$$

Для решения уравнения прежде всего избавимся от дробей, умножив левую и правую части уравнения на 300:

$$\left(\frac{x}{60} - \frac{x}{100}\right) \cdot 300 = 8 \cdot 300,$$

$$5x - 3x = 2400.$$

Доведите решение уравнения до конца и дайте ответ на вопрос задачи.

Способ 2. Пусть Оля шла до школы x мин, тогда Иван шёл $(x - 8)$ мин. Получим более простое уравнение:

$$\underbrace{60x}_{\text{расстояние до школы}} = \underbrace{100(x - 8)}_{\text{расстояние до школы}}.$$

Решите уравнение и дайте ответ на вопрос задачи. (Не забудьте, что, используя найденное значение x , надо ещё найти расстояние от дома до школы.)

ЗАДАЧА НА ПЛОЩАДИ **Задача 3.** Имеется прямоугольный кусок стекла, одна из сторон которого на 30 см больше другой. Чтобы вставить стекло в оконную раму, его длину и ширину пришлось уменьшить на 10 см. Площадь обрезков составила 1400 см^2 . Чему были равны первоначальные размеры стекла?

Пусть x см — длина меньшей стороны куска стекла, тогда $(x + 30)$ см — длина другой его стороны.

Сделаем рисунок (рис. 6.8) и составим уравнение:

$$\underbrace{x(x + 30)}_{\text{первоначальная площадь куска стекла}} - \underbrace{(x - 10)(x + 20)}_{\text{площадь уменьшенного куска стекла}} = \underbrace{1400}_{\text{площадь обрезков}}.$$

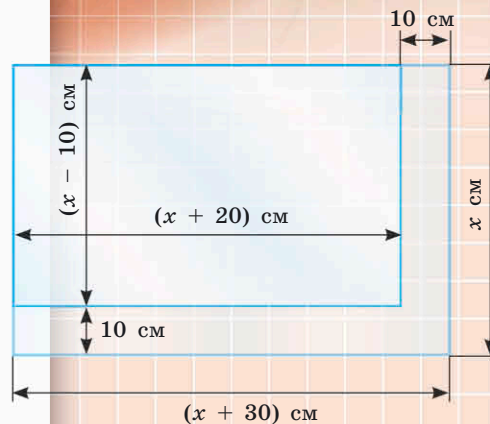
Решим уравнение. Выполним умножение и раскроем скобки:

$$\begin{aligned} x(x + 30) - (x - 10)(x + 20) &= 1400, \\ x^2 + 30x - (x^2 + 20x - 10x - 200) &= 1400, \\ x^2 + 30x - x^2 - 20x + 10x + 200 &= 1400, \\ 20x + 200 &= 1400, \\ 20x &= 1200, \\ x &= 60, x + 30 = 90. \end{aligned}$$

Ответ: 60 см; 90 см.



Рис. 6.8



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Сделайте рисунок по условию задачи, составьте уравнение и решите задачу.

Два мальчика выбегают одновременно навстречу друг другу из двух точек, расстояние между которыми 660 м, и встречаются через 2 мин. Один из них пробегает на 30 м в минуту меньше, чем другой. Сколько метров в минуту пробегает каждый из них?

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

Решите задачу (чтобы легче было составить уравнение, сделайте рисунок) (№ 527–530):

527

Турист вышел из пункта A по направлению к пункту B , расстояние до которого равно 9 км. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, скорость которого на 10 км/ч больше скорости туриста. Через 0,5 ч они встретились. Определите скорость, с которой шёл турист.

528

Расстояние между двумя железнодорожными станциями A и B равно 300 км. От станции A по направлению к станции B вышел пассажирский поезд. Одновременно навстречу ему от станции B вышел электропоезд, скорость которого на 30 км/ч меньше скорости пассажирского поезда. Они встретились через 2 ч на разъезде. На каком расстоянии от A и от B находится разъезд?

Указание. Обозначьте буквой x какую-нибудь из скоростей.

529

Два поезда, встретившись на разъезде, продолжали движение каждый в своём направлении. Скорость одного из них на 20 км/ч больше скорости другого. Через 3 ч расстояние между ними было 480 км. Найдите скорость каждого поезда.

530

От станции к озеру вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 0,5 ч вслед за ним от этой же станции и по той же дороге отправился велосипедист со скоростью 12 км/ч. К озеру они прибыли одновременно. Определите, сколько времени шёл пешеход и чему равно расстояние от станции до озера.

Совет. Переформулируйте условие так, чтобы было легче составить уравнение.

Решите задачу на движение по реке (№ 531–533):

531

Катер по течению реки прошёл за 3,5 ч такое же расстояние, какое он проходит за 4 ч против течения реки. Собственная скорость катера 30 км/ч. Определите скорость течения реки. Какое расстояние прошёл катер по течению реки?

532

Теплоход прошёл расстояние между пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения реки за 5 ч. Определите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч. Чему равно расстояние между пристанями?

533

Лодка проплыла некоторое расстояние от пристани по течению реки и вернулась обратно, затратив на весь путь 8 ч. Собственная скорость лодки 8 км/ч, скорость течения реки 2 км/ч. Определите, сколько времени плыла лодка по течению реки, а также всё расстояние, которое она проплыла.

534

Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 4 км, одновременно вышел пешеход и выехал велосипедист. Велосипедист доехал до пункта B , сразу повернул обратно и встретил пешехода через 24 мин после своего выезда из пункта A . Определите скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что велосипедист проезжает в час на 10 км больше, чем проходит пешеход.

Указание. Воспользуйтесь рисунком 6.9, который поможет составить уравнение.



Рис. 6.9

535

Расстояние между городами A и B равно 240 км. Из города A в город B выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч, а через 30 мин навстречу ему из города B выехал мотоциклист со скоростью, меньшей скорости автомобиля на 20 км/ч. Через какое время после выезда мотоциклиста автомобиль и мотоцикл будут на расстоянии 20 км друг от друга?

Подсказка. Рассмотрите два случая, так как расстояние 20 км между автомобилем и мотоциклистом будет дважды.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ НА ПЛОЩАДИ

Решите задачу (сделайте рисунок по условию задачи) (№ 536–539):

536

Имеются квадрат и прямоугольник. Одна из сторон прямоугольника на 2 см меньше, а другая на 4 см больше стороны квадрата. Найдите длину стороны квадрата и длины сторон прямоугольника, если их площади одинаковы.

537

Пекарня использует для выпечки тортов формы двух видов, имеющие одинаковую площадь дна. У одной из них дно квадратное, а у другой — прямоугольное. Длина прямоугольной формы на 8 см больше, а ширина на 6 см меньше, чем сторона квадратной формы. Найдите размеры дна каждой формы.



538

Площадь квадрата на 63 см^2 больше площади прямоугольника. Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше, а другая на 6 см меньше стороны квадрата. Найдите сторону квадрата и его площадь.

539

Под строительство был отведён участок земли, имеющий форму квадрата. Затем площадь участка решили увеличить на 830 м^2 . Для этого одну из его сторон удлиннили на 4 м, а другую — на 5 м и получили участок прямоугольной формы. Чему была равна площадь первоначального участка?

540

Картинку квадратной формы наклеили на лист белой бумаги, в результате вокруг картинки получилась белая окантовка шириной 5 см. Площадь бумажного листа на 460 см^2 больше площади картинки. Найдите размеры и площадь картинки.



541

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС Оля увлекается разведением аквариумных рыбок. У неё был один аквариум. Дно этого аквариума прямоугольной формы, и одна из его сторон на 16 см длиннее другой. Когда рыбок в аквариуме стало больше, Оля поставила рядом со старым аквариумом новый. У нового аквариума длина и ширина дна на 4 см больше длины и ширины дна старого аквариума. Наливая воду в новый аквариум, Оля заметила, что для заполнения его на высоту 30 см воды потребовалось на 6 л больше, чем при заполнении на такую же высоту старого аквариума. Каковы размеры дна нового аквариума?

Подсказка. Выразите объём в других единицах: $1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 1000 \text{ см}^3$.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

Если натуральное число a делится на натуральное число b , то это значит, что существует такое натуральное число q , что $a = bq$. Например, 3565 делится на 115, так как

$$3565 = 115 \cdot 31.$$

Если число a не делится на число b , то в результате деления a на b получится остаток. Разделим, например, число 3576 на 115: получим неполное частное, равное 31, и остаток, равный 11. В этом случае верно равенство

$$3576 = 115 \cdot 31 + 11.$$

Точно так же обстоит дело и с любыми натуральными числами a и b , если $a > b$. А именно: если при делении a на b получается неполное частное q и остаток r , то $a = bq + r$; при этом число r обязательно меньше b .

Если a делится на b без остатка, т. е. $a = bq$, то можно записать: $a = bq + 0$. Поэтому в таком случае можно считать, что это тоже деление с остатком, просто остаток равен нулю.

Даже в том случае, когда $a < b$, можно говорить о делении a на b с остатком. Пусть $a = 2$, $b = 5$; тогда можно считать, что неполное частное равно 0, а остаток равен 2, т. е. $2 = 5 \cdot 0 + 2$.

Таким образом, для любых натуральных a и b верно равенство $a = bq + r$, где остаток r либо натуральное число, меньшее b , либо равен 0.

Это позволяет *разбивать множество целых неотрицательных чисел на классы по остаткам от деления на заданное число*. Количество таких классов равно количеству возможных остатков.

Например, при делении на 3 получаются остатки 0, 1 и 2. Поэтому множество целых неотрицательных чисел делится на три класса: числа вида $3n$, числа вида $3n + 1$, числа вида $3n + 2$, где $n = 0, 1, 2, 3, \dots$.

1 Найдите остатки от деления каждого из чисел 145, 213, 316 на 6 и запишите эти числа в виде $a = bq + r$.

2 На какие классы разбивается множество неотрицательных целых чисел по остаткам от деления на 2? на 5? на 8? Приведите пример числа каждого вида.

3 Найдите остаток от деления на 10 суммы чисел a , b и c , если известно, что:
а) при делении на 10 число a даёт в остатке 1, число b даёт в остатке 3 и число c даёт в остатке 5;
б) при делении на 10 число a даёт в остатке 3, число b даёт в остатке 5 и число c даёт в остатке 7.

4 а) Числа a и b при делении на 7 дают в остатке соответственно 3 и 4. Докажите, что $a + b$ делится на 7.
б) Числа a и b при делении на 6 дают в остатке соответственно 1 и 3. Докажите, что их сумма есть число чётное.

5 Докажите, что если числа a и b при делении на число c дают один и тот же остаток, то их разность делится на c .

6 Каждое из чисел a и b при делении на 3 даёт в остатке 1. Докажите, что их произведение при делении на 3 также даёт в остатке 1.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Свойства степени с натуральным показателем и их применение

$a^m a^n = a^{m+n}$ — при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складывают.

$a^m : a^n = a^{m-n}$ ($a \neq 0$ и $m > n$) — при делении степеней с одинаковыми основаниями из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

$(a^m)^n = a^{mn}$ — при возведении степени в степень показатели степеней перемножают.

$(ab)^n = a^n b^n$ — при возведении произведения в степень возводят в эту степень каждый множитель отдельно.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ — при возведении дроби в степень возводят в эту степень отдельно её числитель и знаменатель.

$$x^3 x^5 = x^8$$

$$x^{10} = x^4 x^6 = x^3 x^7$$

$$x^{10} : x^6 = x^4$$

$$\frac{3^{15}}{3^{18}} = \frac{1}{3^{18-15}} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$(x^3)^4 = x^{12}$$

$$x^{20} = (x^2)^{10} = (x^4)^5$$

$$(2xy^2)^3 = 8x^3 y^6$$

$$x^5 y^5 = (xy)^5$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3}$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

1 Воспользовавшись соответствующим свойством степени, выполните действие:

а) $a^5 a^3$; б) $a^8 : a^6$; в) $(a^2)^4$; г) $(ab)^6$; д) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

2 Упростите выражение:

а) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$; б) $x^4 \cdot (x^3)^2$; в) $(-2x^3 y^3)^3$; г) $\frac{x^2 x^9}{x^5}$; д) $\frac{12a^3 c}{6a^2 c^3}$.

3 Найдите значение выражения: а) $\frac{5^4 \cdot 5^4}{5^7}$; б) $0,2^{10} \cdot 5^{10}$; в) $\frac{10^6}{5^6}$.

Одночлены и многочлены. Действия с многочленами

Одночленом называется произведение, составленное из чисел, переменных и их степеней.

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов.

Чтобы сложить многочлены, надо составить их сумму и раскрыть скобки.

Чтобы вычесть из одного многочлена другой, надо составить их разность и раскрыть скобки.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и произведения сложить.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого многочлена и произведения сложить.

$6ab$, $-xyz$, c^6 — это примеры одночленов

$a + 2b$, $x^4 + 2x^2 + 3$ — это примеры многочленов (двучлен и трёхчлен соответственно)

$$(ab + c) + (ab - 2c) =$$

$$= ab + c + ab - 2c = 2ab - c$$

$$(ab + c) - (ab - 2c) =$$

$$= ab + c - ab + 2c = 3c$$

$$2a(3b - c + 1) =$$

$$= 6ab - 2ac + 2a$$

$$(a + 4)(c - 2) =$$

$$= ac + 4c - 2a - 8$$

4 Найдите значение выражения:

а) $1,5x - 2y$ при $x = \frac{1}{3}$, $y = 0,3$;
 б) $0,5x^3$ при $x = -2$;

в) $3x^2 - 5x + 4$ при $x = -1$;
 г) $-0,4x^3 + 2,5y$ при $x = -5$, $y = -8$.

5 Выполните действия:

а) $(6x^2 - 2x) + (5 + 10x - 5x^2)$;
 б) $(6xy + 8y) - (2xy + 8y - 1)$;

в) $4x^3(2x^2 - 3x - 2)$;
 г) $(2x - y)(3y - 4x)$.

6 Представьте многочлен $2ab - b^2 + a^2b - 5b$ в виде суммы и в виде разности двух двучленов.

7 Упростите выражение:

а) $3a(a - 2) - 2a(a - 3)$;
 б) $5a(a - c) + c(2a - c)$;

в) $2a(3a - 5) - (a - 3)(a - 7)$;
 г) $(2a + 3)(5 - c) - 3a(a - 1)$.

8 Решите уравнение:

а) $10 - 3(5x - 1,5) = 2,5 - 5x$;

б) $2(3x - 4) = 5x - 3(x + 1)$.

9 Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 26 км, выехал велосипедист. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал мотоциклист со скоростью, на 28 км/ч большей скорости велосипедиста. Они встретились через 0,5 ч. Найдите скорость мотоциклиста.

10 Площадь прямоугольника равна площади квадрата. Одна из сторон прямоугольника на 2 см меньше стороны квадрата, а другая на 3 см больше стороны квадрата. Найдите площадь квадрата.

Формула квадрата суммы

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

$$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 = (x + 3y)^2$$

Формула квадрата разности

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.

$$(x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$$

$$16 - 8x + x^2 = (4 - x)^2 =$$

$$= (x - 4)^2$$

11 Выполните возведение в квадрат:

а) $(3a + 4)^2$;

б) $(2a - 3b)^2$.

12 Упростите выражение:

а) $(a - b)^2 - a(a + 2b)$;

б) $4a(a - 2) - (a - 4)^2$.

13 Представьте трёхчлен в виде квадрата двучлена:

а) $4 + 4a + a^2$;

б) $9a^2 - 6ab + b^2$.

14 Решите уравнение:

а) $9x^2 - (1 - 3x)^2 = 2$;

б) $(x - 5)(x + 5) = (x + 4)^2$.

7 ГЛАВА РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

- ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ
- СПОСОБ ГРУППИРОВКИ
- ФОРМУЛА РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ
- ФОРМУЛЫ РАЗНОСТИ И СУММЫ КУБОВ
- ПРИМЕНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СПОСОБОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ
- РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Узнайте больше

- НЕСКОЛЬКО БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ПРИМЕРОВ

ИНТЕРЕСНО

«Люди, незнакомые с алгеброй, не могут представить себе тех удивительных вещей, которых можно достигнуть при помощи названной науки», — утверждал великий немецкий философ, математик, историк, юрист и дипломат XVII в. Г. В. Лейбниц, встречи с которым подвигли Петра I к одобрению создания Российской академии наук. Владение техникой работы с многочленами — необходимое условие постижения тех действительно удивительных вещей, о которых говорил великий учёный.

7.1

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- В чём состоит задача разложения многочлена на множители.
- Различные способы разложения на множители.
- Как применяется разложение многочленов на множители к решению задач.

Распределительное свойство умножения относительно сложения

Для любых чисел a , b и c верно равенство

$$a(b + c) = ab + ac.$$

После того как вы вынесли общий множитель за скобки, полезно убедиться, что преобразование выполнено верно. Для этого надо выполнить обратное преобразование. Например, чтобы проверить правильность разложения на множители $a^2x + a = a(ax + 1)$, можно мысленно умножить a на $(ax + 1)$ и убедиться, что получен исходный многочлен.

ВЫНЕСЕНИЕ ОБЩЕГО МНОЖИТЕЛЯ ЗА СКОБКИ

При изучении предыдущей главы вы учились выполнять действия с многочленами, в том числе рассматривали различные алгоритмы выполнения умножения многочлена на многочлен. Вы знаете, что результатом этого действия всегда является многочлен. Однако в математике важна и обратная задача — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов. Называют такое преобразование разложением многочлена на множители. Существует целый ряд приёмов разложения многочленов на множители. В этом пункте вы познакомитесь с одним из них.

КАК ВЫНОСЯТ ЗА СКОБКИ ОБЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов, среди которых может быть и одночлен, называют разложением многочлена на множители. Один из приёмов такого преобразования — *вынесение общего множителя за скобки*. Выполняется оно, как и умножение одночлена на многочлен, на основе распределительного свойства: $a(b + c) = ab + ac$. Только в случае вынесения за скобки это свойство читается справа налево: $ab + ac = a(b + c)$.

Пример 1. Вынесем за скобки общий множитель в многочлене $6a^2 - 3ax$.

Каждый член этого многочлена можно представить в виде произведения, в котором один из множителей равен $3a$. Его и вынесем за скобки:

$$6a^2 - 3ax = \underbrace{3a}_{\text{общий множитель}} \cdot 2a - \underbrace{3a}_{\text{общий множитель}} \cdot x = 3a(2a - x).$$

общий множитель

При разложении многочлена $6a^2 - 3ax$ на множители можно вынести за скобки и множитель $-3a$:

$$\begin{aligned} 6a^2 - 3ax &= (-3a) \cdot (-2a) - (-3a) \cdot (-x) = \\ &= -3a(-2a + x) = -3a(x - 2a). \end{aligned}$$



Члены многочлена $6a^2 - 3ax$ имеют разные общие множители: не только $3a$ и $-3a$, но и a , и $-a$, и даже 3 и -3 .

Но обычно за скобки выносят или $3a$, или $-3a$ — так, чтобы в скобках остался многочлен, члены которого не содержат общих буквенных множителей, а их коэффициенты не имеют общих натуральных делителей (не равных 1).

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$10xy^2 - 6x^2y + 2xy.$$

Общим множителем для всех членов многочлена является $2xy$:

$$\begin{aligned} 10xy^2 - 6x^2y + 2xy &= \\ &= \underbrace{2xy}_{\text{общий множитель}} \cdot 5y - \underbrace{2xy}_{\text{общий множитель}} \cdot 3x + \underbrace{2xy}_{\text{общий множитель}} \cdot 1 = \\ &= 2xy(5y - 3x + 1). \end{aligned}$$

Выполните мысленно умножение и убедитесь, что вынесение общего множителя за скобки выполнено правильно.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ Вынесение за скобки общего множителя применяется во многих случаях для решения разнообразных задач.

Пример 3. Найдём значение выражения

$$0,4 \cdot \frac{5}{12} + 1,6 \cdot \frac{5}{12}.$$

Можно вычислить каждое произведение и затем сложить полученные числа. Но если вынести за скобки общий множитель $\frac{5}{12}$, то вычисления будут более простыми, практически устными:

$$0,4 \cdot \frac{5}{12} + 1,6 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12} \cdot (0,4 + 1,6) = \frac{5}{12} \cdot 2 = \frac{5}{6}.$$

Пример 4. Сократим дробь $\frac{ab - ac}{ab}$.

Разложим числитель дроби на множители:

$$\frac{ab - ac}{ab} = \frac{a(b - c)}{ab}.$$

Числитель и знаменатель имеют общий множитель a , на который можно сократить дробь:

$$\frac{a(b - c)}{ab} = \frac{b - c}{b}.$$

Пример 5. Докажем, что сумма любого натурального числа и его квадрата делится на 2.

Доказательство. Обозначим произвольное натуральное число буквой n . Тогда сумма этого числа и его квадрата будет $n^2 + n$. Чтобы доказать, что полученное число делится на 2, надо выражение $n^2 + n$ представить в виде произведения, в котором есть множитель, делящийся на 2.

Вынесем за скобки общий множитель n :

$$n^2 + n = n(n + 1).$$

Мы получили произведение чисел n и $n + 1$. А это два последовательных натуральных числа, и одно из них обязательно является чётным, т. е. делится на 2. Значит, всё произведение делится на 2, и, следовательно, на 2 делится равная этому произведению сумма $n^2 + n$.

$$\begin{aligned} 5ab - 10b^2 &= \\ &= -5b(-a + 2b) = \\ &= -5b(2b - a) \end{aligned}$$

Сократим дробь $\frac{a^2b}{a^2 - ab}$.

$$\frac{a^2b}{a^2 - ab} = \frac{\overset{a}{\cancel{a}} \overset{a}{\cancel{a}} b}{\overset{a}{\cancel{a}} (a - b)} = \frac{ab}{a - b}.$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● На основе какого свойства выполняется вынесение общего множителя за скобки? Назовите общий множитель всех членов многочлена $8ab + 10ac - 2a$ и вынесите его за скобки.

● Найдите значение выражения $0,24 \cdot 23 - 0,24 \cdot 13$, применив вынесение общего множителя за скобки. Прокомментируйте свои действия.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЯЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Вынесите за скобки общий множитель и устно выполните проверку (№ 542–543):

542

- а) $2a + 2b$; в) $5 + 5b$; д) $ab - bc$; ж) $cd + ad$;
б) $3x - 6y$; г) $12y - 16z$; е) $6c + cb$; з) $7x - xy$.

543

- а) $abc - abd$; в) $xyz + yzd$; д) $2ab + 6ac - 4ad$;
б) $2cx + acx$; г) $ad - bd + cd$; е) $abx + acx + adx$.

544

Разложите на множители; проверьте результат умножением:

- а) $a - ab$; в) $2cd + 2c$; д) $xyz - xy$; ж) $5acd - 5ac$;
б) $xy + y$; г) $6a - 6ax$; е) $ac + 2abc$; з) $9xyz + xz$.

Образец. $a + 4ab = a \cdot 1 + a \cdot 4b = a(1 + 4b)$.

545

Разложите на множители:

- а) $a^6 + a^2$; в) $2ab - b^2$; д) $y^2z^2 + 3yz$; ж) $x^2y^2 - 4xy$;
б) $5x^2 - x^4$; г) $y^3 + 8y^2$; е) $ac^2 - a^2c$; з) $3a^2b + 6ab^2$.

546

1) Представьте выражение в виде произведения по следующему образцу:

$$ab - ac = a(b - c); \quad ab - ac = -a(-b + c) = -a(c - b).$$

- а) $xy - xz$; б) $mn - nk$; в) $4ac - 2bc$; г) $12ab - 4a$.

2) Вынесите за скобки множитель $-3a$:

- а) $-3a^2 + 3ab$; в) $3ax - 6ay$;
б) $-3a - 3a^2c$; г) $6a^2y + 3ax$.

Разложите на множители (№ 547–549):

547

- а) $mn^2 + mn + n^2$; в) $3x^3 - 2x^2 - x$; д) $ax^2 + a^2x - ax$;
б) $-m^2 - m^2n - mn^2$; г) $3n^6 + 6n^5 - 12n^4$; е) $-6m^4 - 4m^5 - 2m^6$.

548

- а) $10xy^2 - 35x^3y^3$; б) $9a^6b^3 + 12a^3b^4$; в) $12m^2n^3 + 8m^2n^2$.

549

- а) $2a^2b^2 - 6ab^2 + 2a^2b$; в) $12xy^2z^2 - 8x^3yz^2 - 2x^2y^2z$;
б) $3a^3m + 9a^2m - 6am^2$; г) $-4a^4b^2c - 8a^4b^3c - 16a^3b^2c$.

Вынесите за скобки общий множитель (№ 550–551):

550

- а) $m(n - 1) + 2(n - 1)$; в) $y(a - y) - x(a - y)$;
б) $(x + 1) - 2x(x + 1)$; г) $a(a - b) + c(a - b)$.

551

- а) $a(x - y) - b(y - x)$; в) $x(x - 4) - 5(4 - x)$;
б) $a(b - c) - b(c - b)$; г) $b(b - 1) + (1 - b)$.

Образец. $x(y - z) + 3(z - y) = x(y - z) - 3(y - z) = (y - z)(x - 3)$.

ПРИМЕНЯЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

552

Найдите значение выражения:

а) $n^2 + 3n$ при $n = 97; -203$;

б) $14m^2 - m^3$ при $m = 13; 15$.

553

Вынесите за скобки общий множитель и найдите значение выражения:

а) $9 \cdot 47 + 9 \cdot 13$;

в) $0,8 \cdot 4,5 - 0,8 \cdot 2,5$;

б) $75^2 - 25 \cdot 75$;

г) $0,3 \cdot \frac{5}{6} + 0,7 \cdot \frac{5}{6}$.

554

Вычислите, применяя вынесение общего множителя за скобки:

а) $34 \cdot 18 + 34 \cdot 15 + 33 \cdot 66$;

б) $5,7 \cdot 6,1 - 16,1 \cdot 1,4 - 6,1 \cdot 4,3$.

555

Сократите дробь:

а) $\frac{4a + 4b}{10a}$;

б) $\frac{yz}{xz - yz}$;

в) $\frac{ax - ay}{ax + ay}$;

г) $\frac{ay - az}{by - bz}$;

д) $\frac{a^2 - a}{ab - a}$.

Вычислите (№ 556–557):

556

а) $\frac{2^{14} - 2^{11}}{7 \cdot 2^{12}}$;

б) $\frac{6 \cdot 5^{11}}{2 \cdot 5^{10} - 5^{11}}$;

в) $\frac{3^9}{3^{10} + 3^8}$;

г) $\frac{5^{10} + 2 \cdot 5^8}{2 \cdot 5^9}$.

557

а) $\frac{5 \cdot 4^{27} - 21 \cdot 4^{26}}{2^{50}}$;

б) $\frac{3^{51} - 4 \cdot 3^{50}}{9^{26}}$.

558

Докажите, что значение выражения:

а) $6^8 + 6^7$ делится на 7;

в) $3^4 + 3^5 + 3^6$ делится на 13;

б) $9^{12} - 9^{11}$ делится на 8;

г) $2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8$ делится на 5.

559

Проиллюстрируйте утверждение конкретным примером и докажите его: «Разность между квадратом любого натурального числа и этим числом является чётным числом».

560

МАТЕМАТИКА ВОКРУГ НАС

При решении многих задач в математике, физике, практических расчётах часто приходится вычислять значения одного и того же многочлена, например $4,5x^3 - 7x^2 + 2x - 2,5$, при разных значениях переменной. Чтобы использовать при этом калькулятор, многочлен удобно преобразовать таким образом:

$$4,5x^3 - 7x^2 + 2x - 2,5 = (4,5x^2 - 7x + 2)x - 2,5 = ((4,5x - 7)x + 2)x - 2,5.$$

Возьмите калькулятор и выполните вычисления для $x = 1,7$.

Используя рассмотренный способ, найдите значение выражения

$$6,5x^3 - 5x^2 + 4x - 7$$

при $x = 0,2; 1,8; 2,7$.

Неверно!

Исправьте ошибки:

а) $ab + 2a = a(b + 2a)$;

в) $x^2y + xy = xy(x + y)$;

б) $5a - ab = -a(b + 5)$;

г) $ax^3 + ax^2 - x = x(ax^2 + ax)$.

7.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как в ряде случаев можно разложить многочлен на множители, группируя его члены.

СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Многочлен $ax - bx + ay - by$ можно разложить на множители. Его члены не имеют общего множителя, однако способ, который вы рассмотрите в этом пункте, фактически сводится именно к вынесению общего множителя за скобки. Надо только преобразовать многочлен так, чтобы общий множитель появился.

КАК ГРУППИРОВАТЬ СЛАГАЕМЫЕ

Пример 1. Разложим на множители многочлен

$$ax - bx + ay - by.$$

Группируем члены многочлена так, чтобы в каждой группе имелся общий множитель

$$ax - bx + ay - by = (ax - bx) + (ay - by) =$$

Выносим в каждой группе за скобки общий множитель

$$= x(a - b) + y(a - b) =$$

Теперь выносим за скобки общий множитель $(a - b)$

$$= (a - b)(x + y)$$

Способ, применённый для разложения многочлена на множители, имеет название *способ группировки*.



Заметьте, что совсем не обязательно группировать слагаемые, которые расположены рядом. Так, для многочлена $ax - bx + ay - by$ к нужному результату приведёт и группировка первого члена с третьим, а второго — с четвёртым:

$$\begin{aligned} ax - bx + ay - by &= (ax + ay) - (bx + by) = \\ &= a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b). \end{aligned}$$

ПРИМЕНЯЕМ СПОСОБ ГРУППИРОВКИ

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$5a + 5b - 5c - 2ab - 2b^2 + 2bc.$$

Члены многочлена можно сгруппировать по три или по два. Рассмотрим каждый из этих способов.

Способ 1. $5a + 5b - 5c - 2ab - 2b^2 + 2bc =$

$$\begin{aligned} &= (5a + 5b - 5c) - (2ab + 2b^2 - 2bc) = \\ &= 5(a + b - c) - 2b(a + b - c) = (a + b - c)(5 - 2b). \end{aligned}$$

Способ 2. $5a + 5b - 5c - 2ab - 2b^2 + 2bc =$

$$\begin{aligned} &= (5a - 2ab) + (5b - 2b^2) - (5c - 2bc) = \\ &= a(5 - 2b) + b(5 - 2b) - c(5 - 2b) = (5 - 2b)(a + b - c). \end{aligned}$$

Иногда группировку удаётся применить только после некоторого преобразования исходного многочлена.

Пример 3. Разложим на множители многочлен

$$x^2 - 6x + 8.$$

Чтобы применить группировку, представим одночлен $-6x$ в виде суммы двух слагаемых: $-2x$ и $-4x$:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 &= x^2 - 2x - 4x + 8 = \\ &= x(x - 2) - 4(x - 2) = (x - 2)(x - 4). \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Как называют способ, который можно применить для разложения на множители многочлена

$$ab - ac + 2b - 2c?$$

Выполните разложение этого многочлена на множители, сгруппировав члены разными способами.

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЯЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

561

Представьте выражение в виде произведения:

- а) $x(x + y) - 4y(x + y)$; г) $2a(a - b) + 3b(a - b)$;
 б) $3x(a + x) + (a + x)$; д) $a(a - 5) + 7(a - 5)$;
 в) $a(a - c) - (a - c)$; е) $2(x + 3) - y(x + 3)$.

562

Завершите группировку слагаемых и разложите на множители многочлен:

- а) $4a + 4b - 3b(a + b)$; в) $ay + 3(x + y) + ax$; д) $5b - 10c + a(b - 2c)$;
 б) $x(x - 2y) + 2x - 4y$; г) $x(a - 2b) + ay - 2by$; е) $ab - 2(b + 7) + 7a$.

563

Разложите многочлен на множители, группируя слагаемые разными способами:

- а) $xy + xz + 6y + 6z$; б) $cd + 3a + 3d + ac$.

564

Выполните разложение на множители:

- а) $x(y + z) - 5y - 5z$; в) $a(b - c) - 4b + 4c$; д) $2b(x - y) + y - x$;
 б) $3a(b + c) - b - c$; г) $2a(x - c) - bx + bc$; е) $5(c - b) + ab - ac$.

Совет. Будьте внимательны со знаками при заключении слагаемых в скобки; проверьте обратным преобразованием, правильно ли расставлены знаки.

565

Разложите на множители многочлен:

- а) $ab + ac - b - c$; в) $ab - ad + 3b - 3d$; д) $am - a - 2m + 2$;
 б) $mn - m + n - 1$; г) $xy - xz - y + z$; е) $3x - 3y - 2ax + 2ay$.

566

Впишите пропущенный член многочлена так, чтобы этот многочлен можно было разложить на множители способом группировки:

- а) $ax + bx + ca \dots$; в) $m^2n - m - mn \dots$;
 б) $n^3 - 2n^2 + n \dots$; г) $mc + c - mb \dots$.

Разложите на множители многочлен (№ 567–569):

567

- а) $x^2 + xy - x - y$; в) $4ac - c^2 + 4a^2 - ac$; д) $x^2y^2 + y^3 - x^3 - xy$;
 б) $a^3 - a^2b + a - b$; г) $10b^2 - 5b + 2bc - c$; е) $y^3 - y^2 - 3y + 3$.

568

- а) $ax + bx - ay - by + az + bz$; в) $a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5$;
 б) $2a^2 - a + 2ab - b - 2ac + c$; г) $ax^2 + bx + b^2y + abxy + a^2bx + ab^2$.

569

- а) $b^2 + 5b + 6$; б) $c^2 - 7c + 12$; в) $a^2 + 5ab + 4b^2$; г) $c^2 - 4cb + 3b^2$.
Подсказка. В качестве образца возьмите пример 3 из текста.

ПРИМЕНЯЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

Найдите значение выражения при заданных значениях переменных (№ 570–571):

570

- а) $2b - 2c - ab + ac$ при $a = -0,7$; $b = 10,1$; $c = 9,1$;
 б) $ax - ay + 5x - 5y$ при $a = 12$; $x = -1,7$; $y = -1,8$.

571

- а) $m^2 - m - mn + n$ при $m = 17,2$; $n = 7,2$;
 б) $m^3 + m^2n - mn - n^2$ при $m = 11,5$; $n = -11,5$.

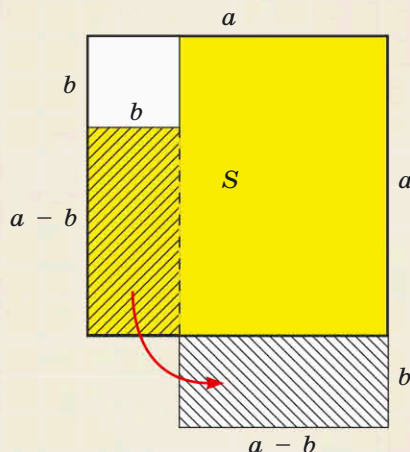
7.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как применять формулы сокращённого умножения для разложения многочленов на множители.
- Ещё об одной формуле сокращённого умножения.

Алгебраические соотношения, в том числе и те, которые выражают формулы сокращённого умножения, были известны ещё в VI в. до н.э. Только греческие математики в те времена для их представления использовали не числа или буквы, а отрезки и прямоугольники, изображая эти соотношения геометрически. И часто геометрическая «картинка» ясно выражает неочевидную на первый взгляд формулу.

Геометрическое доказательство формулы разности квадратов



Площадь жёлтой фигуры
 $S = a^2 - b^2$.

«Перекроив» её, видим:

$$S = (a - b)(a + b).$$

Отсюда

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

ФОРМУЛА РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ

При разложении многочленов на множители встречается несколько особых случаев, освоить которые очень полезно. Это эффективные и часто используемые способы, основанные на применении формул сокращённого умножения.

Вывод формулы разности квадратов Двучлен $a^2 - b^2$ представляет собой разность квадратов. Это выражение можно разложить на множители. При этом получится красивая и легко запоминающаяся формула.

Выведем эту формулу.

Разложим рассматриваемое выражение на множители, применив способ группировки. Для этого воспользуемся таким приёмом: прибавим к двучлену $a^2 - b^2$ и вычтем из него выражение ab . Получим

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= a^2 - b^2 + ab - ab = \\ &= (a^2 + ab) - (b^2 + ab) = \\ &= a(a + b) - b(b + a) = \\ &= (a + b)(a - b). \end{aligned}$$

Получили формулу разности квадратов:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Разность квадратов двух чисел равна произведению разности этих чисел на их сумму.

ПРИМЕНЯЕМ ФОРМУЛУ РАЗНОСТИ КВАДРАТОВ

Пример 1. Разложим на множители двучлен $9x^2 - 25$.

Этот двучлен можно разложить на множители по формуле разности квадратов, так как каждый его член представляет собой квадрат некоторого выражения.

Представим каждый член двучлена в виде квадрата, получим $(3x)^2 - 5^2$.

Теперь воспользуемся формулой:

$$\begin{aligned} (3x)^2 - 5^2 &= (3x - 5)(3x + 5). \\ a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \end{aligned}$$

Пример 2. Докажем, что разность $89^2 - 56^2$ делится на 11.

Разложим разность $89^2 - 56^2$ на множители:

$$\begin{aligned} 89^2 - 56^2 &= (89 - 56) \cdot (89 + 56) = \\ &= 33 \cdot 145 = 11 \cdot 3 \cdot 145. \end{aligned}$$

Произведение $11 \cdot 3 \cdot 145$ делится на 11, следовательно, равная ему разность $89^2 - 56^2$ делится на 11.

Пример 3. Сократим дробь $\frac{a^2 - 4}{3a - 6}$.

Разложим на множители числитель и знаменатель дроби:

$$\frac{a^2 - 4}{3a - 6} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{3(a - 2)}.$$

Числитель и знаменатель имеют общий множитель $a - 2$; сократим дробь на этот множитель:

$$\frac{(a - 2)(a + 2)}{3(a - 2)} = \frac{a + 2}{3}.$$

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ Вы знаете две формулы сокращённого умножения — формулу квадрата суммы и формулу квадрата разности:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Формула разности квадратов фактически является ещё одной формулой сокращённого умножения. Для этого её надо применить справа налево.

$$(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$$

Произведение разности двух чисел и их суммы равно разности квадратов этих чисел.

С помощью этой формулы можно умножать разность двух выражений на их сумму, не выполняя промежуточных преобразований.

Пример 4. Упростим выражение $(2a - 3c)(2a + 3c)$.

$$(2a - 3c)(2a + 3c) = (2a)^2 - (3c)^2 = 4a^2 - 9c^2.$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Все три формулы могут применяться в двух направлениях — для выполнения умножения и для разложения на множители. В примерах 1–3 была проиллюстрирована возможность разложения многочлена на множители по формуле разности квадратов. Приведём пример разложения многочлена на множители с использованием формул квадрата разности и квадрата суммы.

Пример 5. Многочлен $x^2 - 6xy + 9y^2$ можно представить в виде квадрата двучлена, или, что эквивалентно, как произведение двух одинаковых множителей:

$$\begin{aligned} x^2 - 6xy + 9y^2 &= x^2 - 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (x - 3y)^2 = \\ &= (x - 3y)(x - 3y). \end{aligned}$$

Пример 6. Представим многочлен $a^2 + 10a + 25$ в виде произведения, используя формулу квадрата суммы:

$$\begin{aligned} a^2 + 10a + 25 &= a^2 + 2a \cdot 5 + 5^2 = \\ &= (a + 5)^2. \end{aligned}$$

Сократим дробь $\frac{a^2 - 4}{3a - 6}$:

$$\frac{a^2 - 4}{3a - 6} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{3(a - 2)} = \frac{a + 2}{3}.$$

Квадрат суммы:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат разности:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Разность квадратов:

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{aligned} (5x + y)(y - 5x) &= \\ &= (y - 5x)(y + 5x) = \\ &= y^2 - (5x)^2 = \\ &= y^2 - 25x^2 \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Запишите формулу разности квадратов и прочитайте её словами.

● К какому из следующих выражений можно применить формулу разности квадратов:

$$x^2 + 9; \quad x^2 - 4y^2; \quad -x^2 - y^2?$$

● Дополните равенство

$$(a - b)(a + b) = \dots$$

и прочитайте полученную формулу. Какие ещё формулы сокращённого умножения вы знаете?

УПРАЖНЕНИЯ

ВЫПОЛНЯЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

572

Выпишите выражения, которые можно разложить на множители по формуле разности квадратов:

а) $p^2 - q^2$;

в) $25 + x^2$;

д) $-x^2 - 4y$;

б) $4 - a^2$;

г) $9a^2 - 4b^2$;

е) $a^2b^2 - 1$.

Разложите на множители (№ 573–576):

573

а) $x^2 - y^2$;

в) $a^2 - 25$;

д) $x^2 - 1$;

ж) $y^2 - 0,09$;

б) $y^2 - x^2$;

г) $36 - c^2$;

е) $1 - a^2$;

з) $\frac{9}{16} - b^2$.

574

а) $9a^2 - 4$;

б) $4x^2 - 25$;

в) $16 - 81b^2$;

г) $4y^2 - 1$;

д) $1 - 100c^2$.

575

а) $4a^2 - 9b^2$;

в) $49y^2 - x^2$;

д) $0,25b^2 - c^2$;

б) $25m^2 - 16n^2$;

г) $100a^2 - 0,01c^2$;

е) $x^2 - 0,81y^2$.

576

а) $a^2b^2 - 81$;

б) $4 - x^2y^2$;

в) $b^2c^2 - 1$;

г) $x^4 - y^2$;

д) $a^{10} - 9$.

577

Выпишите выражения, которые можно разложить на множители по формуле квадрата суммы или квадрата разности, и выполните разложение:

$m^2 - 2mn + n^2$;

$c^2 - a^2$;

$25 + 10x + x^2$;

$9a^2 + 3ab + b^2$.

578

Представьте многочлен в виде произведения:

а) $x^2 - 4xy + 4y^2$;

в) $1 - 10a + 25a^2$;

б) $a^2 + 6a + 9$;

г) $4x^2 + 12xy + 9y^2$.

579

Составьте выражение, которое можно разложить на множители: по формуле разности квадратов; по формуле квадрата суммы; по формуле квадрата разности. Выполните разложение на множители.

Разложите на множители (№ 580–581):

580

а) $(a + b)^2 - c^2$;

в) $(x + y)^2 - 4$;

д) $(x - y)^2 - (x + y)^2$;

б) $(k - m)^2 - n^2$;

г) $(a - c)^2 - 1$;

е) $(a + 2b)^2 - (2a - b)^2$.

581

а) $(x + y) + (x^2 - y^2)$;

в) $(a + 8) + (a^2 - 64)$;

д) $(a - 1)^2 - (a^2 - 1)$;

б) $(a - b) + (a^2 - b^2)$;

г) $(2 - c) - (4 - c^2)$;

е) $(x^2 - 4) + (x - 2)^2$.

Найдите значение выражения (№ 582–583):

582

а) $57^2 - 43^2$;

б) $63^2 - 62^2$;

в) $37,9^2 - 27,9^2$;

г) $12,3^2 - 12,2^2$.

583

а) $\frac{2,7^2 - 2,3^2}{2,8^2 - 2,2^2}$;

б) $\frac{4,3^2 - 3,2^2}{2,8^2 - 2,7^2}$;

в) $\frac{7,8^2 - 7,2^2}{1,5^2}$;

г) $\frac{6,4}{7,6^2 - 4,4^2}$.

584

Сократите дробь:

а) $\frac{a - b}{a^2 - b^2}$;

б) $\frac{x^2 - 1}{ax + a}$;

в) $\frac{ab - 2a}{b^2 - 4}$;

г) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + 2ab + b^2}$;

д) $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$.

585

Докажите, что значение выражения $85^2 - 61^2$ делится на 12 и на 73 и не делится на 11 и 19.

586

Найдите какие-нибудь десять делителей числа, равного $76^2 - 44^2$.

587

Докажите, что:

- а) разность квадратов двух последовательных натуральных чисел равна сумме этих чисел;
 б) разность квадратов двух последовательных чётных чисел равна удвоенной сумме этих чисел.

Проиллюстрируйте доказанные утверждения конкретными примерами.

ПРИМЕНЯЕМ ФОРМУЛЫ СОКРАЩЁННОГО УМНОЖЕНИЯ

Выполните умножение (№ 588–590):

588

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| а) $(a - 4)(a + 4)$; | г) $(x + y)(x - y)$; | ж) $(1 + m)(m - 1)$; |
| б) $(2 - y)(2 + y)$; | д) $(x - 3)(3 + x)$; | з) $(a + x)(x - a)$; |
| в) $(m + n)(m - n)$; | е) $(b - c)(c + b)$; | и) $(c + 10)(10 - c)$. |

589

- | | |
|---------------------------|-----------------------------|
| а) $(1 + 2a)(1 - 2a)$; | г) $(3a - 4b)(3a + 4b)$; |
| б) $(3x - 5)(3x + 5)$; | д) $(5m + 3n)(3n - 5m)$; |
| в) $(2x - 3y)(2x + 3y)$; | е) $(10c + 2b)(2b - 10c)$. |

590

- | | |
|---------------------------|-------------------------|
| а) $(x^2 + 1)(x^2 - 1)$; | в) $(ab - c)(ab + c)$; |
| б) $(a - b^2)(a + b^2)$; | г) $(2 - xy)(2 + xy)$. |

Представьте выражение в виде многочлена (№ 591–596):

591

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| а) $(2 - a)(2 + a) + 2a^2$; | б) $m^2 - (3m - 1)(3m + 1)$. |
|------------------------------|-------------------------------|

592

- | | |
|-------------------------------------|--|
| а) $(x + 1)(x - 1) + x(x - 2)$; | г) $(a - 2)(a + 2) + (3 - a)(3 + a)$; |
| б) $(2a - b)(b + 2a) + a(4 - 3a)$; | д) $(m + n)(m - n) - (m - n)^2$; |
| в) $5y(y + 1) - (x - 3y)(x + 3y)$; | е) $(2a + 1)^2 + (1 - 2a)(1 + 2a)$. |

593

- | | |
|-------------------------|-------------------------|
| а) $m(m + 1)(m - 1)$; | в) $2c(a - c)(a + c)$; |
| б) $-2(x - 3)(x + 3)$; | г) $3x(1 + y)(y - 1)$. |

594

- | |
|--|
| а) $(a - 2)(2 + a) + (a + 3)(a - 3) - a(2a - 1) + 4$; |
| б) $(1 - 2a)(1 + 2a) - (2 - a)(2 + a) + 5(a^2 - 1)$. |

595

- | | |
|----------------------------------|---|
| а) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)$; | б) $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)$. |
|----------------------------------|---|

596

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------------|
| а) $(a + b - c)(a + b + c)$; | в) $(a^2 - 2a + 1)(a^2 + 2a + 1)$; |
| б) $(x + y - z)(x - y + z)$; | г) $(m^2 + 4m + 4)(4 - 4m + m^2)$. |

Подсказка. Примените формулы сокращённого умножения.

597

Вычислите: а) $19 \cdot 21$; б) $99 \cdot 101$; в) $28 \cdot 32$; г) $4\frac{1}{2} \cdot 5\frac{1}{2}$.

Образец. $49 \cdot 51 = (50 - 1) \cdot (50 + 1) = 50^2 - 1 = 2500 - 1 = 2499$.

598

Проведите такой эксперимент: возьмите любые три последовательных натуральных числа и убедитесь в том, что произведение крайних из них равно квадрату среднего, уменьшенному на единицу. Докажите это утверждение.

Подсказка. Обозначьте среднее число буквой n .

7.4

ФОРМУЛЫ РАЗНОСТИ И СУММЫ КУБОВ

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Новые формулы для разложения многочленов на множители.
- Соответствующие им формулы сокращённого умножения.
- О возможностях применения этих формул для решения задач.

Формула разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ является частным случаем представления в виде произведения двучленов вида $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ (в последнем случае n – нечётное натуральное число). Вы познакомитесь с ними в старших классах. А здесь мы рассмотрим ещё два конкретных случая соответствующих формул – для выражений $a^3 - b^3$ и $a^3 + b^3$.

ВЫВОД ФОРМУЛ Формула разности кубов выглядит так:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел и неполного квадрата их суммы.

Принятое в этой формулировке название *неполный квадрат* понятно: в выражении $a^2 + ab + b^2$ не хватает ещё одного слагаемого ab , чтобы получить выражение, равное квадрату суммы a и b .

Подобрать соответствующую группировку для доказательства формулы в этом случае достаточно трудно. Поэтому убедимся в справедливости этого равенства, просто перемножив многочлены в правой части:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} - \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

Формула суммы кубов выглядит так:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Сумма кубов двух чисел равна произведению суммы этих чисел и неполного квадрата их разности.

Доказать эту формулу вы можете самостоятельно, точно так же как и объяснить происхождение термина *неполный квадрат разности*.

Если прочитать формулы разности кубов и суммы кубов справа налево, то их можно использовать как формулы сокращённого умножения.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Запишите формулы разности кубов и суммы кубов и прочитайте их.
- Выберите многочлены, которые можно разложить на множители с помощью формулы разности кубов или суммы кубов:
 $8 - x^3$; $x^3 + y$; $x^3 + 27y^3$; $x^2 - y^3$.
 Разложите на множители выбранные вами выражения.

ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ

Пример 1. Разложим на множители выражение $1 - 8x^3$.

Двучлен $1 - 8x^3$ можно представить в виде разности кубов: $1^3 - (2x)^3$.

Поэтому можно применить формулу:

$$1 - 8x^3 = 1^3 - (2x)^3 = (1 - 2x)(1 + 2x + 4x^2).$$

Пример 2. Сократим дробь $\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 - y^2} = \frac{(x + y)(x^2 - xy + y^2)}{(x - y)(x + y)} = \frac{x^2 - xy + y^2}{x - y}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

599

Выполните умножение по правилу умножения многочленов:

а) $(a + 1)(a^2 - a + 1)$; б) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$.

600

Выполните умножение, используя формулу разности кубов или суммы кубов:

а) $(x - 1)(x^2 + x + 1)$; в) $(2m + 2n)(4m^2 - 4mn + 4n^2)$;

б) $(a + c)(a^2 - ac + c^2)$; г) $(9 - b)(81^2 + 9b + b^2)$.

601

Упростите выражение:

а) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

б) $(c + 2)(c^2 - 2c + 4) - (c - 2)(c^2 + 2c + 4)$;

в) $x(x - 1)(x + 1) - (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

г) $y(y + 3)^2 - (y + 2)(y^2 - 2y + 4) - 2(y - 2)(3y + 2)$.

602

Разложите на множители:

а) $x^3 + a^3$;

в) $x^3 - a^3$;

д) $y^3 + 27$;

ж) $b^3 + \frac{1}{125}$;

б) $a^3 + 1$;

г) $a^3 - 8$;

е) $-x^3 + y^3$;

з) $\frac{1}{27} - n^3$.

603

Представьте в виде произведения многочленов:

а) $8a^3 + b^3$;

в) $8x^3 - 64y^3$;

д) $\frac{1}{27}c^3 - x^3$;

б) $1 - \frac{1}{27}x^3$;

г) $b^3 + \frac{1}{8}c^3$;

е) $0,001a^3 + 0,125$.

604

Составьте выражения, которые можно разложить на множители с помощью формул суммы кубов и разности кубов. Выполните эти преобразования.

605

Разложите на множители:

а) $x^3y^3 - 1$;

б) $8a^3b^3 + c^3$;

в) $1 - a^3b^3c^3$;

г) $a^3b^3 - 125x^3y^3$.

606

Представьте в виде произведения:

а) $(a + b)^3 - (a - b)^3$;

в) $(m + 3)^3 - (m - 3)^3$;

б) $(x - y)^3 + (x + y)^3$;

г) $(n - 1)^3 + (n + 1)^3$.

607

Сократите дробь:

а) $\frac{a + b}{a^3 + b^3}$;

б) $\frac{x^3 - y^3}{3x - 3y}$;

в) $\frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}$;

г) $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^3 - b^3}$;

д) $\frac{x^3 + y^3}{5(x^2 - xy + y^2)}$.

608

Докажите, что верно равенство:

а) $\frac{a^3 + b^3}{a + b} + ab = a^2 + b^2$;

б) $\frac{a^3 - b^3}{a - b} + ab = (a + b)^2$.

609

Представьте выражение в виде многочлена:

а) $(a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$;

в) $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^8 + x^4 + 1)$;

б) $(a + b)^2(a^2 - ab + b^2)^2$;

г) $(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$.

610

Выполните умножение:

а) $(a + 1)(a^2 - a + 4)$;

в) $(a - b)(a^2 + 3ab + b^2)$;

б) $(x - 1)(x^2 + x + 7)$;

г) $(x + y)(x^2 - 3xy + y^2)$.

Подсказка. Преобразуйте второй множитель так, чтобы можно было применить формулу разности кубов или суммы кубов.

Например: $(a + 1)(a^2 - a + 4) = (a + 1)((a^2 - a + 1) + 3) = \dots$

7.5

ВЫ УЗНАЕТЕ:

Как можно комбинировать различные приёмы при разложении многочленов на множители.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СПОСОБОВ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Мы рассмотрели разные приёмы, которые применяются для разложения многочленов на множители. Однако часто для достижения цели приходится применять не один, а несколько приёмов последовательно.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО КОМБИНИРОВАНИЮ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЁМОВ

Общих правил, помогающих установить, какие способы и в каком порядке следует применять, не существует. Более того, разложение многочлена на множители не всегда возможно. И всё же некоторых полезных рекомендаций следует придерживаться.

- Если можно вынести за скобки общий множитель, то прежде всего сделайте это.
- Посмотрите, нельзя ли воспользоваться какой-либо формулой:
 - для двучлена проверьте, можно ли применить формулу разности квадратов или разности (суммы) кубов;
 - для трёхчлена посмотрите, можно ли «свернуть» его в квадрат двучлена.
- Если не удаётся применить формулы сокращённого умножения, то попытайтесь воспользоваться способом группировки.
- Когда вы закончили разложение на множители, полезно проверить с помощью умножения, верен ли результат, полученный вами.

ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Пример 1. Разложим на множители многочлен $2ab^2 - 18a$.

Будем придерживаться приведённых рекомендаций:

- 1) вынесем за скобки общий множитель;
- 2) применим формулу разности квадратов:

$$2ab^2 - 18a = 2a(b^2 - 9) = 2a(b - 3)(b + 3).$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$ax + ay - x^2 - 2xy - y^2.$$

Общего множителя члены не имеют. Многочлен состоит из пяти слагаемых, поэтому никакая из известных нам формул напрямую применена быть не может.

Попробуем способ группировки. Сгруппируем два первых и три последних члена, получим

$$\begin{aligned} ax + ay - x^2 - 2xy - y^2 &= (ax + ay) - (x^2 + 2xy + y^2) = \\ &= a(x + y) - (x + y)^2 = (x + y)(a - (x + y)) = \\ &= (x + y)(a - x - y). \end{aligned}$$

В первой группе слагаемых мы вынесли за скобки общий множитель, а во второй применили формулу квадрата суммы и, наконец, вынесли за скобки $(x + y)$.

Пример 3. Разложим на множители двучлен $a^4 - b^4$.

Представим двучлен как разность квадратов. Получим

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = \\ &= (a - b)(a + b)(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Какие приёмы разложения многочленов на множители вы знаете?
- Расскажите, как вы действуете, раскладывая на множители многочлен

$$ax^2 - 2axy + ay^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

Разложите на множители многочлен (№ 611–620):

611 а) $10a^2 - 10b^2$; б) $3bx^2 - 3by^2$; в) $12x^2 - 12$; г) $2an^2 - 8a$.

612 а) $x^3 - 4x$; б) $5a^3 - 5a$; в) $a^3 - ax^2$; г) $8y - 2y^3$; д) $3bc^2 - 12b^3$.

613 а) $2a^2 + 4a + 2$; б) $-5x^2 + 10x - 5$; в) $x^2y + 2xy^2 + y^3$; г) $a^3y - 4a^2y + 4ay$; д) $3c^2 - 18ac + 27a^2$; е) $6bc^2 - 3b^2c - 3c^3$.

614 а) $x^4 - y^4$; б) $a^4 - a^2$; в) $y^4 - 16$; г) $m^4 - 9m^2$; д) $1 - b^4$; е) $c^2 - 16c^4$; ж) $x^4 - y^8$; з) $1 - a^8$.

615 а) $3x^3 + 3y^3$; б) $-2a^3 - 2c^3$; в) $am^3 - an^3$; г) $5 + 5x^3$; д) $-y^4 + 27y$.

616 а) $b^2 - c^2 - b + c$; б) $a + b - a^2 + b^2$; в) $a^3 + a^2 - a - 1$; г) $m - m^2 - n + n^2$; д) $ab^2 + cd^2 - ad^2 - b^2c$; е) $x^2y^2 + 1 - y^2 - x^2$.

617 а) $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2$; б) $xy^2 + x^2y - x^3 - y^3$; в) $n^4 + an^3 - n - a$; г) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

618 а) $ax + ay - x^2 - 2xy - y^2$; б) $a^2 - 2ab + b^2 - a + b$; в) $a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$; г) $9a^4 + 6a^2c + c^2 - 9$; д) $ma^2 - m^3 - 2m^2 - m$; е) $4x^5 + 4x^3y + xy^2 - 4x$.

619 а) $a^2 - 25 - 2a(a^2 - 25) + a^2(a^2 - 25)$; б) $6x(y^2 - 1) + 9x^2(y^2 - 1) - 1 + y^2$.

620 а) $(a - x)(x^2 - y^2) - (x - y)(a^2 - x^2)$; б) $(a - x)(x^3 - y^3) - (x - y)(a^3 - x^3)$.

621 В пункте 7.2 вы разобрали, как можно разложить на множители трёхчлен $x^2 - 6x + 8$ способом группировки. Разберём ещё один способ: выделим в многочлене квадрат двучлена и затем применим формулу разности квадратов. Этот приём часто так и называют — *выделение квадрата двучлена*.

$$x^2 - 6x + 8 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + 8 = (x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 1 = (x - 3)^2 - 1 = \\ = (x - 3 - 1)(x - 3 + 1) = (x - 4)(x - 2).$$

Используя этот способ, разложите на множители:

а) $a^2 + 4a - 5$; б) $x^2 - 2x - 24$; в) $a^2 + 8a + 15$; г) $x^2 - 10x + 21$.

622 Докажите, что $28^6 - 1$ делится на 29. Найдите ещё 5 делителей этого числа.

623

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

1) Докажите, что:

а) $\frac{x^4 - y^4}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)$; б) $\frac{x^8 - y^8}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$;

в) $\frac{x^{16} - y^{16}}{x - y} = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)$.

2) Какую закономерность вы заметили? Используя её, сократите дробь:

а) $\frac{x^{32} - y^{32}}{x - y}$; б) $\frac{x^{64} - y^{64}}{x - y}$. Сколько множителей получилось в каждом случае?

7.6

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Условие равенства нулю произведения.
- Новый вид уравнений, решаемых с помощью разложения многочленов на множители.

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Сформулируйте условие равенства нулю произведения.
- Определите, какие из чисел 0; -3; 3; -8; 8 являются корнями уравнения $(x + 3) \cdot (x - 8) = 0$.
- Примените приём решения уравнения, рассмотренный в примере 1, для нахождения корней уравнения $x^2 - 81 = 0$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ НА МНОЖИТЕЛИ

Вы умеете решать линейные уравнения или уравнения, сводящиеся к ним после преобразований. Например, вы знаете, как действовать, чтобы найти корень уравнения $2(3x - 7,5) = 0$. Но, поступая таким же образом при решении уравнения $x(x + 9) = 90$, вы получите уравнение $x^2 + 9x = 90$, для решения которого не подходит способ, применяемый вами обычно. В этом случае вам поможет умение раскладывать многочлены на множители.

УСЛОВИЕ РАВЕНСТВА НУЛЮ ПРОИЗВЕДЕНИЯ Рассмотрите произведения:

$$12 \cdot 0; \quad 0 \cdot 5,9 \cdot 24; \quad 0 \cdot 0; \quad 43 \cdot 0,01.$$

В первых трёх случаях результатом умножения будет 0, а в последнем случае нуля не получится.



Произведение двух или нескольких чисел равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ Покажем, как это свойство можно использовать для решения уравнений, левая часть которых представляет собой многочлен, который можно разложить на множители, а правая — нуль.

Пример 1. Решим уравнение $4x^2 - 9 = 0$.

Разложим левую часть уравнения на множители, получим $(2x - 3)(2x + 3) = 0$.

Равенство нулю произведения $(2x - 3)(2x + 3)$ означает, что

$$2x - 3 = 0 \text{ или } 2x + 3 = 0.$$

Исходное уравнение распалось на два более простых уравнения. Теперь надо решить каждое из них:

$$\begin{array}{l|l} 2x - 3 = 0, & 2x + 3 = 0, \\ 2x = 3, & 2x = -3, \\ x = 1,5. & x = -1,5. \end{array}$$

Произведение $(2x - 3)(2x + 3)$, а значит, и левая часть уравнения обращаются в нуль при $x = 1,5$ и $x = -1,5$. Уравнение имеет два корня: 1,5 и -1,5.

Пример 2. Решим уравнение $(x + 3)(5x - 4)(x - 1) = 0$.

Это равенство означает, что

$$x + 3 = 0 \text{ или } 5x - 4 = 0 \text{ или } x - 1 = 0.$$

$$\begin{array}{l|l|l} x = -3. & 5x = 4, & x = 1. \\ & x = 0,8. & \end{array}$$

Ответ: -3; 0,8; 1.

УПРАЖНЕНИЯ

Найдите корни уравнения (№ 624–626):

624

а) $(x - 1)(x + 4) = 0$;

в) $(6 - x)(5 - 2x) = 0$;

д) $-2x(x - 3) = 0$;

б) $(x + 4)(2x - 1) = 0$;

г) $(2 + 5y)(2y + 7) = 0$;

е) $y(3y + 9) = 0$.

625

а) $x^2 - 9 = 0$;

в) $1 - y^2 = 0$;

д) $36 - 4x^2 = 0$;

б) $4y^2 - 25 = 0$;

г) $9x^2 - 25 = 0$;

е) $y^2 - 0,49 = 0$.

626

а) $3x^2 + 15x = 0$;

в) $-2x^2 - 4x = 0$;

д) $6y + 4y^2 = 0$;

б) $9y - y^2 = 0$;

г) $3x - 6x^2 = 0$;

е) $-5x^2 - 2x = 0$.

627

Найдите корни уравнения подбором, а затем решите уравнение, применив разложение на множители: а) $x^2 = x$; б) $a^2 = -a$; в) $y^2 = 5y$; г) $b^2 = -5b$.

Найдите корни уравнения (№ 628–630):

628

а) $(x + 3)(x - 5)(x - 7) = 0$;

г) $(7 - x)(3 + 4x)(x + 2) = 0$;

б) $(x - 4)(2x + 1)(x - 1) = 0$;

д) $x(3 + x)(x - 6) = 0$;

в) $(1 - x)(3x - 2)(x + 5) = 0$;

е) $x(2 - x)(3 - 2x) = 0$.

629

а) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

в) $4x^2 - 4x + 1 = 0$;

б) $4x^2 + 12x + 9 = 0$;

г) $9x^2 + 12x + 4 = 0$.

Подсказка. Представьте многочлен в левой части в виде квадрата двучлена.

630

а) $(x^2 + 1)(x - 6) = 0$;

в) $(x - 1)^2(x + 3) = 0$;

б) $(2y - 1)(y^4 + 3) = 0$;

г) $(3y + 12)(y + 2)^2 = 0$.

Решите уравнение (№ 631–633):

631

а) $3x(x - 1) + (x^2 - 1) = 0$;

в) $3x(x - 2) - (4 - x^2) = 0$;

б) $2(y - 1) - (1 - y)^2 = 0$;

г) $(y - 3)^2 - 2(3 - y) = 0$.

632

а) $(x - 1)^2 - 4 = 0$;

в) $1 - (x + 3)^2 = 0$;

д) $x^3 - x = 0$;

б) $(x + 2)^2 - 9 = 0$;

г) $25 - (10 - x)^2 = 0$;

е) $x^3 - 9x = 0$.

633

а) $x^2 + 4x + 3 = 0$;

в) $x^2 - 2x - 3 = 0$;

д) $x^2 - 4x - 12 = 0$;

б) $x^2 + 2x - 8 = 0$;

г) $x^2 - 10x + 16 = 0$;

е) $x^2 - 8x + 15 = 0$.

Образец. а) $x^2 + 4x + 3 = 0$. Разложим многочлен на множители выделением квадрата двучлена: $x^2 + 4x + 3 = (x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4) + 3 - 4 = (x + 2)^2 - 1 = (x + 2 - 1)(x + 2 + 1) = (x + 1)(x + 3)$.Получаем уравнение $(x + 1)(x + 3) = 0$.

Доведите решение до конца.

634

Решите уравнение относительно x :

а) $x^2 - a^2 = 0$;

в) $(x + 4)^2 - a^2 = 0$;

б) $m^2 - x^2 = 0$;

г) $16 - (x - m)^2 = 0$.

Образец. $x^2 - (a - 1)^2 = 0$; $(x - a + 1)(x + a - 1) = 0$; $x - a + 1 = 0$ или $x + a - 1 = 0$; $x = a - 1$; $x = 1 - a$.*Ответ:* $x = a - 1$; $x = 1 - a$.

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

НЕСКОЛЬКО БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ПРИМЕРОВ

Теория многочленов в математике развивалась в связи с решением уравнений и делимостью целых чисел. И в тех, и в других задачах полезно разложить многочлен на множители, и именно поэтому разложение на множители является основной задачей теории многочленов.

Для решения этой задачи в разных случаях придумано немало приёмов и формул, некоторые из них вам уже известны.

Но как уже говорилось, общего алгоритма разложения многочлена на множители нет. Это всегда искусство. Это красиво, но непросто.

Вспомним, например, известную вам формулу разности кубов:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Мы легко доказали эту формулу, преобразовав правую часть и получив левую. Это оказалось несложным только потому, что формула была сразу предъявлена. Но можно попробовать самим открыть эту формулу. Например, так:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) = \\ &= a^2(a - b) + b(a - b)(a + b) = (a - b)(a^2 + b(a + b)) = \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Использованный приём «прибавить-вычесть» вам, конечно, известен. Он очень эффективен, и с его помощью в математике доказывается немало трудных теорем. Однако главная трудность состоит в неясности, что именно надо прибавить и вычесть, чтобы разложить многочлен на множители. Поэтому часто приходится делать много попыток, отказываясь от тупиковых идей и путей решения.

Научиться разложению на множители, развить свою фантазию и изобретательность можно только на собственном опыте.

Пример 1. Разложим на множители двучлен $n^4 + 4$.

Выражение $n^4 + 4$ можно записать в виде суммы квадратов:

$$n^4 + 4 = (n^2)^2 + 2^2.$$

Далее естественно попробовать прибавить и вычесть удвоенное произведение n^2 и 2, т. е. $4n^2$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= (n^2)^2 + 4n^2 + 2^2 - 4n^2 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = \\ &= (n^2 + 2 - 2n)(n^2 + 2 + 2n). \end{aligned}$$

Пример 2. Разложим на множители многочлен $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

$$\begin{aligned} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 &= x^3 - 6x^2 + 12x - x - 6 = \\ &= (x^3 - x) - (6x^2 - 12x + 6) = x(x^2 - 1) - 6(x^2 - 2x + 1) = \\ &= x(x - 1)(x + 1) - 6(x - 1)^2 = (x - 1)(x(x + 1) - 6(x - 1)) = \\ &= (x - 1)(x^2 + x - 6x + 6) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6). \end{aligned}$$

Многочлен на множители разложен, и можно сказать, что поставленная задача решена. Однако можно продолжить преобразования и разложить на множители ещё и многочлен $x^2 - 5x + 6$:

$$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = x(x - 2) - 3(x - 2) = (x - 2)(x - 3).$$

Получился более красивый результат:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Пример 3. Решим уравнение

$$x^4 + x^2 - 2 = 0.$$

Мы сможем решить это уравнение, если разложим его левую часть на множители. Это можно сделать, воспользовавшись знакомой вам формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2 &= x^4 - 1 + x^2 - 1 = \\ &= ((x^2)^2 - 1) + (x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 + 1 + 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Итак, мы разложили многочлен на множители и можем записать данное уравнение в виде

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) = 0.$$

Двучлен $(x^2 + 2)$ всегда положителен. Поэтому остаётся рассмотреть случаи, когда $x - 1 = 0$ или $x + 1 = 0$. Таким образом, уравнение имеет два корня: -1 и 1 .

Заметим, что применённый нами способ разложения многочлена $x^4 + x^2 - 2$ на множители вовсе не единственно возможный. Можно, например, разложить этот многочлен на множители, используя тот же приём «прибавить-вычесть», но уже совсем по-другому:

$$\begin{aligned} x^4 + x^2 - 2 &= \\ &= x^4 - 2x^2 + 1 + 2x^2 - 1 + x^2 - 2 = \\ &= (x^4 - 2x^2 + 1) + 3x^2 - 3 = \\ &= (x^2 - 1)^2 + 3(x^2 - 1) = \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 1 + 3) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2). \end{aligned}$$

Разложите на множители многочлен (№ 1–2):

1 а) $a^3 - 5a^2 + 9a - 5$; б) $x^4 + 4x^2y^2 - 5y^4$.

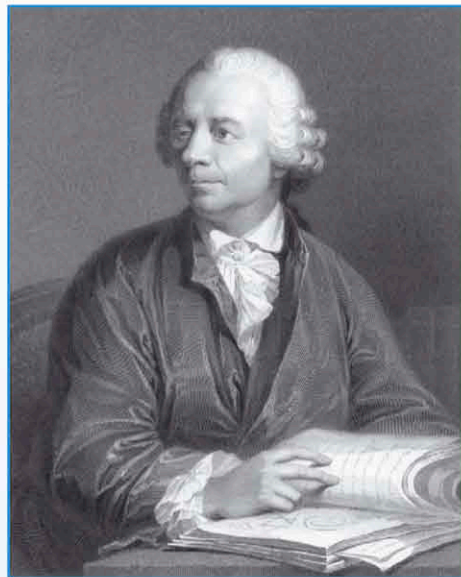
2 а) $n^4 + n^2 + 1$; б) $n^8 + n^4 + 1$.

3 Решите уравнение $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$.

4 Докажите разными способами, что:
а) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
б) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

5 Докажите, что число $2^{14} + 1$ делится на 113.

Подсказка. Разложите выражение $2^{14} + 1$ на множители; воспользуйтесь для этого приёмом, применённым в примере 1 из текста.



Леонард Эйлер
1707–1783

Внёс значительный вклад в развитие алгебры многочленов. Эйлер был не только гениальным математиком, но и замечательным физиком, инженером, астрономом, географом, а также великолепным педагогом. В учебной литературе по алгебре XVIII в. первое место занимала его «Универсальная арифметика», опубликованная на русском, немецком, французском, английском и других языках. Многие годы он жил и работал в России. Член Петербургской академии наук.



Почтовая марка, выпущенная в 1957 г. к 250-летию со дня рождения Леонарда Эйлера.

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Вынесение общего множителя за скобки

Способ группировки

Формулы сокращённого умножения:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$12a^2b - 8ab = 4ab(3a - 2)$$

$$xy - xz - 2y + 2z = (xy - xz) - (2y - 2z) = x(y - z) - 2(y - z) = (y - z)(x - 2)$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2$$

$$x^2 - 10xy + 25y^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y + (5y)^2 = (x - 5y)^2$$

$$16a^2 - c^2 = (4a)^2 - c^2 = (4a - c)(4a + c)$$

$$n^3 - 8 = n^3 - 2^3 = (n - 2)(n^2 + 2n + 4)$$

$$1 + a^3 = 1^3 + a^3 = (1 + a)(1 - a + a^2)$$

1 Вынесите за скобки общий множитель:

а) $10x^2 + 4x$;

в) $6n^3 + 8n^2 - 4n$;

б) $2a^2b - 4ab^2$;

г) $a(b - 4) + 2(b - 4)$.

Разложите на множители (№ 2–3):

2 а) $ax - ay + 3x - 3y$; б) $ab + ac - bx - cx$.

3 а) $x^2 - 64$; б) $9a^2 - 16b^2$; в) $x^2 - 6x + 9$; г) $a^3 + 8$.

4 Сократите дробь: а) $\frac{3 - a}{3a - a^2}$; б) $\frac{x^2 - y^2}{5x - 5y}$.

5 Упростите выражение:

а) $(2x - 3y)(2x + 3y)$;

в) $(x - 1)(x + 1) - x(x - 3)$;

б) $(a + 5)(5 - a)$;

г) $(a - c)(a + c) + (a - c)^2$.

6 Разложите на множители:

а) $ax^2 - 4a$;

б) $3a^2 - 6ab + 3b^2$;

в) $a^3 - 9a$.

Произведение двух или нескольких чисел равно нулю в том и только в том случае, когда хотя бы одно из этих чисел равно нулю.

Решим уравнение $(x + 3)(2x - 5) = 0$.

$(x + 3)(2x - 5) = 0$;

$x + 3 = 0$ или $2x - 5 = 0$;

$x = -3$; $x = 2,5$. Ответ: -3 ; $2,5$.

Решим уравнение $2x^2 + 7x = 0$.

$x(2x + 7) = 0$;

$x = 0$ или $2x + 7 = 0$;

$x = 0$; $x = -3,5$. Ответ: 0 ; $-3,5$.

7 Решите уравнение:

а) $x^2 - 144 = 0$;

в) $(x - 8)(3x + 9) = 0$;

б) $x^2 + 7x = 0$;

г) $2x(5x - 12) = 0$.

8

- ## Узнайте больше



Как расшифровали древнейшую крито-микенскую письменность (3000–1000 гг. до н. э., Эгейское море)? С помощью комбинаторики. Анализ знаков имевшихся текстов, проделанный американским учёным Алисой Кобер (а в её картотеке было около 186 тыс. карточек с различным написанием знаков критского письма), позволил сначала установить, что слова состоят из слогов, а затем отделить гласные и согласные буквы. Получилась координатная сетка, в ней вместо одной оси стояли номера гласных букв, а вместо другой — согласных. Но какие именно буквы? Это удалось установить, прибегнув к методу перебора, начав с гласных (ведь известно, что их меньше, чем согласных). И текст «заговорил» на языке, близком греческому языку, но принадлежащем более ранней эпохе. Произошло это в середине XX в.

8.1

ВЫ ВСПОМНИТЕ:

Как решают комбинаторные задачи.

Одна из первых задач комбинаторики звучит так: «Сколько есть способов извлечь m элементов из N возможных?» Упоминается она с IV в. до н. э. в трудах мудрецов Древней Индии.

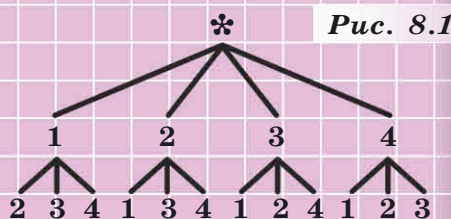


Рис. 8.1

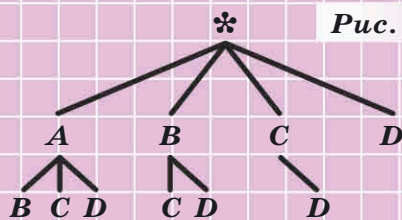


Рис. 8.3

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

Каким был бы ответ в задаче о туристских тропах, если бы:

- на вершину вели 5 троп;
- туристы могли вернуться и тем путём, которым пришли?

Для каждого случая опишите дерево возможных вариантов.

Решите задачу об отрезках для пяти точек.

РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

При решении комбинаторных задач приходится отвечать на вопросы вида «Сколькими способами?», «Сколько существует вариантов?». Вам уже приходилось решать такие задачи с помощью перебора всех возможных вариантов, и вы знаете, что организовать перебор часто удобно, используя кодирование или дерево возможных вариантов.

ЗАДАЧА О ТУРИСТСКИХ ТРОПАХ На вершину горы ведут 4 тропы. Сколькими способами туристы могут составить маршрут, если они не хотят спускаться по тропе, по которой поднимались?

Занумеруем тропы цифрами от 1 до 4 и выпишем все возможные варианты подъёма и спуска:

12	21	31	41
13	23	32	42
14	24	34	43

Всего маршрутов $4 \cdot 3 = 12$.

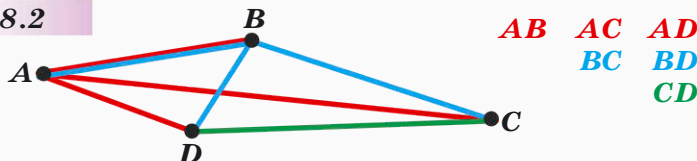
Построим дерево возможных вариантов (рис. 8.1).

На первом уровне дерева 4 узла (подъём по любой из 4 троп). Из каждого узла выходят 3 ветви (спуск по трём остальным тропам). Всего маршрутов — $4 \cdot 3 = 12$.

ЗАДАЧА ОБ ОТРЕЗКАХ На плоскости отмечены 4 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

Будем перечислять отрезки сначала с концом в точке A, затем в точке B, после этого в точке C и, наконец, в точке D. Но у отрезка два конца; отрезок AB и отрезок BA — это один и тот же отрезок (рис. 8.2). Мы каждый отрезок будем учитывать только один раз:

Рис. 8.2



Всего 6 отрезков.

Дерево возможных вариантов выглядит так, как показано на рисунке 8.3. Оно не симметрично. На нём нет половины ветвей — тех, что соответствуют второму «имени» каждого отрезка.



Обратите внимание: дерево может получиться симметричным, как в задаче о туристских тропах, или несимметричным, как в задаче об отрезках.

УПРАЖНЕНИЯ

КОДЫ И ДЕРЕВЬЯ

635

1) В задаче о туристских тропах дано множество из четырёх троп. Решение задачи сводилось к вычислению количества пар, в которых первым элементом мог быть любой элемент множества, а вторым — любой из оставшихся элементов. При этом пары 12 и 21 считались различными. Какие из следующих задач похожи на задачу о тропах?

а) Четыре друга обменялись при встрече рукопожатиями. Сколько рукопожатий было сделано?

б) Четыре пассажира, ехавших в одном купе, обменялись номерами телефонов. Сколько всего номеров было записано?

в) Турист планирует посетить 4 города. Сколько существует различных маршрутов, проходящих через все эти города?

г) В спортивной секции 4 девушки. Надо выбрать двух для участия в соревнованиях по бегу. Сколькими способами это можно сделать?

д) В чемпионате участвуют 4 команды. Сколькими способами могут распределиться между ними первые два места?

2) Какой задаче соответствует дерево возможных вариантов, изображённое на рисунке 8.4?

3) Изобразите дерево возможных вариантов для задачи в).

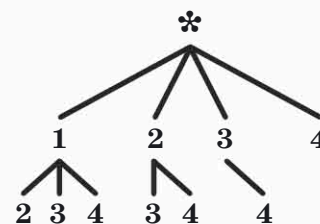


Рис. 8.4

636

В задачах а) и б) даны два множества. Для составления пар берётся по одному элементу из каждого множества. Нарисуйте дерево возможных вариантов и решите задачу.

а) На полдник можно взять яблоко, грушу или апельсин и один из пяти соков. Сколько существует различных вариантов полдника?

б) В танцевальном ансамбле 4 девушки и 3 юноши. Сколькими способами можно составить пару из юноши и девушки?

637

Нарисуйте дерево возможных вариантов и решите задачу.

а) В чемпионате по футболу участвуют 5 команд. Перед началом первенства был объявлен конкурс знатоков, в котором требовалось угадать распределение золотой, серебряной и бронзовой медалей. Сколько различных ответов может быть получено на этот вопрос?

б) Для участия в параде ретроавтомобилей клуб выбрал 4 машины. Сколькими способами можно составить из них кортеж?

в) Сколько диагоналей у выпуклого пятиугольника?

638

Сколько словарей необходимо иметь, чтобы непосредственно переводить с любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого и итальянского — на любой другой из этих пяти языков?

639

1) Между числами 1_2_3 вставляют знаки арифметических действий: $+$ $-$ $\cdot$ $:$ $.$ Сколькими различными выражениями может при этом получиться?

2) Вычислите значения тех из них, которые отрицательны.

640

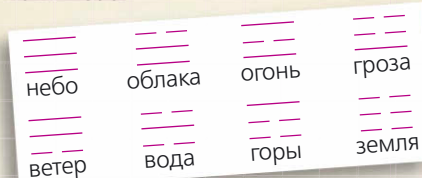
На плоскости отмечены 5 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

8.2

ВЫ УЗНАЕТЕ:

О комбинаторном правиле умножения и о том, как его применять при решении задач.

Первое упоминание о комбинаторных идеях встречается в китайских рукописях XII–XIII вв. до н.э. В них писалось, что всё в мире является сочетанием двух начал — мужского и женского, которое авторы обозначали символами — и ——. В рукописи «Же-ким» показаны различные соединения этих знаков по 2 и по 3. Восемь рисунков из трёх рядов символов изображали землю, горы, воду, ветер, грозу, огонь, облака и небо.



КОМБИНАТОРНОЕ ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Решать задачи с помощью перебора всех возможных вариантов можно лишь для небольшого числа объектов. Когда число объектов в множестве велико, осуществить полный перебор — занятие трудоёмкое, а может, даже и невозможное. Как же быть в этом случае? Надо искать правило, применимое для любого конечного числа объектов.

ЗАДАЧА О РАССТАНОВКЕ ТРЁХ КНИГ Сколькими способами можно расставить на полке 3 книги?

Решим эту задачу с помощью дерева возможных вариантов (рис. 8.5). Обозначим книги буквами А, В и В.

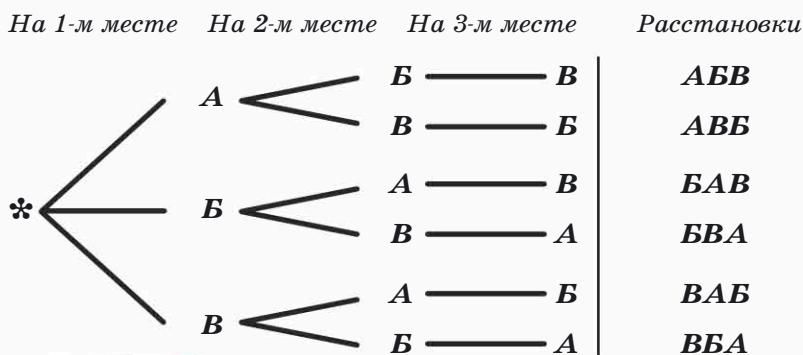


Рис. 8.5

Первой можно поставить любую книгу: либо А, либо В, либо В, поэтому из корня дерева выходят три ветви. Для каждого из 3 способов выбора первой книги есть 2 способа выбора второй книги, чему соответствуют две выходящие ветви. Третья книга «ставится» автоматически. Итого: $3 \cdot 2 = 6$ способов. Мы получили 6 различных расстановок трёх книг. Обратите внимание: дерево получилось симметричным.

ДВЕ ЗАДАЧИ О КОДОВОМ ЗАМКЕ Прежде чем мы сформулируем общее правило, рассмотрим ещё один пример.

Сколько существует различных вариантов кода дверного замка, если этот код состоит из двух цифр?

Поскольку никаких условий на выбор цифр не наложено, первой в коде может стоять любая из десяти цифр. При каждом выборе первой цифры на второе место также можно поставить любую из десяти цифр. Значит, всего будет $10 \cdot 10 = 10^2$ вариантов кода.

Изменим условие: пусть теперь цифры кода должны быть разными. Сколько тогда существует вариантов кода?

Как и прежде, первой в коде может быть любая из десяти цифр. Но вторая цифра уже не может совпадать

с первой. Поэтому для каждого выбора первой цифры остаётся 9 способов выбрать вторую цифру. Значит, всего будет $10 \cdot 9 = 90$ вариантов кода.

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ Способ рассуждения, который мы применили для решения всех рассмотренных задач, выводит нас на так называемое *правило умножения*. В общем виде его можно сформулировать так:



Если первый элемент некоторой пары можно выбрать m способами и для каждого из этих способов второй элемент можно выбрать n способами, то эту пару можно выбрать $m \cdot n$ способами.



Правило умножения распространяется и на тот случай, когда элементов больше двух. Изменим, например, условие задачи с кодами: пусть требуется найти число кодов, составленных не из двух, а из трёх различных цифр. Понятно, что для каждого набора первых двух цифр остаётся 8 вариантов выбора третьей цифры. Значит, в этом случае всего будет $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов кода.

ЗАДАЧА О ШАХМАТНОМ ТУРНИРЕ Правило умножения очень полезно при решении многих комбинаторных задач, однако его нельзя применять механически, не задумываясь над смыслом и вопросом задачи. Рассмотрим задачу, в которой дерево возможных вариантов будет несимметричным.

Задача. В турнире участвовало 16 шахматистов, причём каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего было сыграно партий?

В каждой партии встречаются два шахматиста. Сколько партий сыграет каждый участник? 15 партий. Всего участников — 16, значит, можно подумать, что всего будет сыграно $16 \cdot 15 = 240$ партий.

Однако при таком подсчёте каждая партия оказалась сосчитана дважды: один раз при подсчёте партий, сыгранных первым игроком, и другой раз при подсчёте партий второго игрока. Значит, на самом деле партий было сыграно вдвое меньше, т. е. число партий должно быть сосчитано так: $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$.



«Искусство, называемое комбинаторикой, должно почитаться полезным. Оно учит нас, как перечислять всевозможные способы, которыми несколько вещей могут быть объединены, переставлены или соединены друг с другом, так чтобы мы были уверены, что не упустили ничего, что могло бы содействовать нашей цели».

Из книги Я. Бернулли
«Искусство предположений»
(1713)



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Изобразите схематически дерево возможных вариантов для каждой задачи о кодовом замке.
- Каким будет ответ в первой задаче о кодовом замке, если:
 - а) первой цифрой кода не может быть 0;
 - б) код оканчивается цифрой 5;
 - в) код оканчивается чётной цифрой;
 - г) все цифры кода нечётные;
 - д) первая цифра кода чётная, а вторая нечётная?
- Сформулируйте правило умножения для трёх элементов.

УПРАЖНЕНИЯ

ЗАДАЧИ, ПОХОЖИЕ НА ЗАДАЧИ О КОДОВОМ ЗАМКЕ

641

- а) На почте продаётся 40 разных конвертов и 25 разных марок. Сколько есть вариантов покупки конверта с маркой?
- б) Для праздника «Будущий первоклассник» детский сад покупает набор из книги и открытки. В книжном киоске продаётся 4 вида книг и 6 видов открыток. Можно ли для группы, в которой 25 детей, составить разные наборы?

642

- а) В буфете театра предлагают 3 вида бутербродов, 5 сортов конфет и 2 вида сока. Сколькими способами можно выбрать набор из бутерброда, конфеты и сока?
- б) Для городского чемпионата по футболу закупили футболки, шорты и гетры, каждая часть формы трёх цветов: красного, синего и белого. Сколько есть вариантов составления футбольной формы из футболки, шорт и гетр?



643

- а) В забеге участвуют 8 спортсменов, из которых только 2 выходят в финал. Сколькими способами могут распределиться два первых места?
- б) Сколько существует вариантов выбора спикера и вице-спикера парламента, если всего в парламенте 101 депутат?

644

- В высшей лиге чемпионата по футболу участвуют 16 команд.
- а) Сколькими способами могут распределиться три первых места?
- б) Две команды, занявшие по результатам чемпионата два последних места, выбывают из лиги. Сколькими способами может распределиться эта пара неудачников?

645

- а) В классе 10 одноместных парт. Сколькими способами можно рассадить за них трёх школьников?
- б) В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно посадить в этот поезд четырёх пассажиров, так чтобы все они ехали в разных вагонах?

646

Сколько существует четырёхзначных чисел, составленных из чётных цифр? из четырёх разных чётных цифр?

647

Сколько существует пятизначных чисел, которые делятся на 2? на 5? на 10?

ЗАДАЧИ, ПОХОЖИЕ НА ЗАДАЧУ О ШАХМАТНОМ ТУРНИРЕ

648

- Какая из задач решается тем же способом, что и задача о шахматном турнире?
- 1) Четыре подруги каждая с каждой обменялись смс-сообщениями. Сколько всего сообщений было отправлено?
- 2) Пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, соединены отрезками. Сколько всего отрезков проведено?

649

- а) В чемпионате по настольному теннису участвовало 20 спортсменов, и каждый с каждым сыграл по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?

б) На официальном приёме 100 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего рукопожатий было сделано?

Неверно!

В конференции участвовало 40 человек, и они каждый с каждым обменялись визитной карточкой. Сколько всего карточек понадобилось?

Два ученика дали такие решения:

Андрей: $40 \cdot 39 = 1560$; Николай: $\frac{40 \cdot 39}{2} = 780$.

Какое решение неверно? Объясните, в чём ошибка.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

650

а) Пять государств установили друг с другом дипломатические отношения, при этом каждое с каждым обменялись послами. Сколько всего послов было направлено?

б) В государстве 25 городов, и каждые два города соединены авиалинией. Сколько всего авиалиний в стране?

651

Монету подбрасывают 5 раз подряд и каждый раз записывают, что выпало — орёл или решка. Сколько разных последовательностей из орлов и решек может при этом получиться?

Подсказка. Если вы затрудняетесь, рассмотрите сначала случай, когда монету бросают 3 раза. Для этого случая можно нарисовать дерево возможных вариантов. Подумайте, как решить задачу, применив правило умножения.

652

В компьютере каждый символ кодируется последовательностью, состоящей из восьми цифр — нулей и единиц. Например, символ «пробел» закодирован так: 00101000. Какое наибольшее число символов может быть таким образом закодировано?

653

Сколько трёхзначных чисел можно составить, используя цифры 0, 1, 2, 3, если:

а) никакая цифра не может повторяться;

б) повторения цифр допустимы;

в) числа должны быть нечётными и повторений цифр быть не должно?

Указание. В случае в) проверьте свой ответ, начертив дерево возможных вариантов.

654

Номер автомобильного прицепа состоит из двух букв и четырёх цифр. Сколько существует различных номеров такого вида? (*Замечание.* Номер не может состоять из четырёх нулей. В России используются 12 букв кириллицы, имеющих графические аналоги в латинском алфавите.)



655

Бизнесмен планирует поездку из Москвы в Вашингтон через Нью-Йорк и обратно тем же маршрутом. При этом он может воспользоваться услугами одной из пяти авиакомпаний, совершающих рейсы между Москвой и Нью-Йорком, и трёх других авиакомпаний, совершающих рейсы между Нью-Йорком и Вашингтоном. Сколькими способами он может совершить поездку при условии, что не воспользуется услугами какой-либо авиакомпании дважды?

8.3

ВЫ УЗНАЕТЕ:

О комбинаторном правиле сложения и о том, как его применять при решении задач.



АЗБУКА МОРЗЕ

А	..	И	..	Р		Ш	----
Б	—...	Й	----	С		Щ	----
В		К	—..	Т	—	Ъ	
Г	---	Л		У		Ь	---
Д	—..	М	--	Ф		Ы	----
Е	.	Н	..	Х		Э	
Ж		О	---	Ц		Ю	
З		П		Ч	----	Я	

ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

- Как изменится ответ в задаче о флагах, если разрешить и сигналы из одного флага?
- В кодах каких букв больше 4 знаков? Почему именно в этих буквах?
- Сколько знаков (букв, цифр, знаков препинания) можно закодировать последовательностью не более чем из 5 точек и тире?

ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ

Правило умножения относится к ситуациям, в которых надо выполнить два действия: сначала одно действие, а затем другое. Совершенно иная ситуация возникает тогда, когда надо выполнить либо одно действие, либо другое. Как поступать в таких случаях?

ЗАДАЧИ О ПЕРЕДАЧЕ СИГНАЛОВ **Задача 1.** Имеется три различных флага. На мачте поднимается сигнал, состоящий не менее чем из двух флагов. Сколько различных сигналов можно поднять на мачте, если сигналы, составленные из одинаковых флагов, но взятых в разном порядке, считаются различными?

Сигнал можно поднять либо из двух флагов, либо из трёх флагов. Сначала подсчитаем число сигналов, составленных из двух флагов. По правилу умножения их $3 \cdot 2 = 6$. Поднять три флага можно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способами. Если сигнал из двух флагов можно поднять шестью способами и сигнал из трёх флагов — шестью способами, то поднять сигнал или из двух, или из трёх флагов можно $6 + 6 = 12$ способами. Мы воспользовались *правилом сложения*.



Если первое действие можно выполнить n способами, а второе действие — m способами, то выполнить или первое действие, или второе действие можно $m + n$ способами.

Задача 2. При передаче сообщений по телеграфу использовалась азбука Морзе. В этой азбуке каждая буква передаётся с помощью точек и тире. Например, буква Е закодирована точкой, а буква Т — тире. Понятно, что, чем короче последовательность знаков, обозначающих букву, тем лучше. Можно ли обойтись последовательностями не более чем в 4 знака, чтобы закодировать все буквы русского алфавита?

С помощью одного знака — точки или тире — можно закодировать 2 буквы. После первого знака опять можно поставить точку или тире. Значит, с помощью двух знаков можно закодировать $2 \cdot 2 = 4$ буквы. Из каждой последовательности из двух знаков получаются ещё две приписыванием точки или тире, т. е. тремя знаками можно закодировать $4 \cdot 2 = 8$ букв. С помощью четырёх знаков (точек и тире) можно закодировать $8 \cdot 2 = 16$ букв.

Итак, с помощью последовательности из одного, двух, трёх или четырёх знаков (точек и тире) можно закодировать $2 + 4 + 8 + 16 = 30$ букв. А в русском алфавите 33 буквы, значит, последовательностями не более чем из четырёх знаков обойтись нельзя — необходимо использовать последовательности из пяти знаков.

УПРАЖНЕНИЯ

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

656

Сколько всего треугольников на рисунке 8.6?

657

В некотором алфавите три буквы: а, б, в. Сколько всего слов, состоящих не более чем из трёх букв, можно составить?

658

В кондитерской есть пирожные трёх видов: эклеры, слоёные, песочные. Сколькими различными способами можно составить набор из трёх пирожных?

659

Джаз-оркестр формируют из ударников, трубачей и саксофонистов. Всего набирают 6 человек. Сколько различных составов такого оркестра может быть?

660

Сколько сигналов можно поднять на мачте, если имеется четыре разных флага и каждый сигнал должен состоять не менее чем из двух флагов? (Сигналы, составленные из флагов, взятых в разном порядке, считаются различными.)

661

В некотором алфавите 10 букв, при этом словом считается любая последовательность, состоящая не более чем из пяти букв. Сколько всего таких слов?

662

В троичной системе счисления используются цифры 0, 1, 2. Сколько чисел в троичной записи содержат не более трёх цифр?

663

При приготовлении пиццы, кроме сыра, можно добавлять различные компоненты (но это не обязательно). У Ирины есть помидоры, лук, сосиски и грибы. Она считает, что все эти компоненты совместимы, причём в любых сочетаниях. Сколько типов пиццы у неё может получиться?

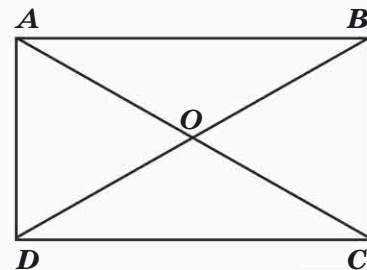


Рис. 8.6



664

ЗАДАЧА-ИССЛЕДОВАНИЕ

Велосипедисты не любят цифру 8, потому что «восьмёрка» — название одного из дефектов велосипедного колеса. На велосипеды выдаются четырёхзначные номера. Номер считается несчастливym, если в нём есть хотя бы одна цифра 8. Каких номеров больше: счастливых или несчастливых?

а) На первый взгляд кажется, что поскольку цифра 8 всего лишь одна из 10 возможных, то несчастливых номеров должно быть намного меньше, чем счастливых. А так ли это? Проведите вычисления (используйте калькулятор).

б) Проверьте, выполняется ли это соотношение для пятизначных номеров.

в) На велосипеды выдаются n -значные номера. Подберите наименьшее значение n , при котором счастливых номеров будет меньше, чем несчастливых.

8.4

ВЫ УЗНАЕТЕ:

- Как решать задачи, в которых нужно подсчитать число способов, которыми можно упорядочить все элементы множества.
- Что называют факториалом.

Термин «перестановка» впервые употребил Якоб Бернулли в книге «Искусство предположений»:

«Перестановками вещей я называю разновидности, которые, сохраняя одно и то же множество вещей, разными способами изменяют их порядок и положение. Так, если кто-то спросит, сколькими способами несколько вещей могут быть так переставлены или смешаны друг с другом, чтобы все они всегда были взяты и изменялся (изменялось) лишь их порядок или положение, то говорят, что дело идёт о всех перестановках этих вещей».

Термин «факториал» был образован от латинского слова *factorialis* — действующий, производящий, умножающий. Впервые он появился у французского математика Луи Арбогаста, а общепринятое в наши дни обозначение $n!$ предложил его коллега Кристиан Крамп. Оба они жили в г. Страсбурге в конце XVIII в.

ПЕРЕСТАНОВКИ

Сколькими способами может распределиться порядок выступления прыгунов с трамплина? места среди участников соревнований? очередность учащихся класса на вакцинацию? В комбинаторных задачах часто ставится вопрос о том, сколькими способами можно расположить в ряд, или, как говорят математики, упорядочить, все элементы некоторого множества. Как же решаются такие задачи?

ПЕРЕСТАНОВКИ **Задача.** В финальной части турнира четверо участников. Сколькими способами могут распределиться места между ними?

Будем рассуждать в соответствии с правилом умножения. Первое место может занять любой из четырёх участников. При этом второе место может занять любой из трёх оставшихся, третье — любой из двух оставшихся, а на четвёртом месте останется последний участник. Значит, места между участниками могут быть распределены $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами.

Каждое расположение элементов множества в определённом порядке называют **перестановкой**. Решив задачу, мы фактически подсчитали число перестановок для множества из четырёх элементов. Рассуждая точно так же, можно показать, что для множества из пяти элементов число перестановок равно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, а для множества из десяти элементов $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Вообще, если множество содержит n элементов, то число перестановок равно $n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$.

ФАКТОРИАЛ Множители в произведении первых n натуральных чисел можно записать и в обратном порядке: $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1)n$. Такие произведения бывают очень длинными и часто выражают огромные числа. В математике есть специальный символ для их обозначения. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n обозначают $n!$; читают: « n факториал». Значение выражения $n!$ можно найти для любого натурального числа n (при этом считают, что $1! = 1$).

Растут факториалы удивительно быстро. Вы можете понаблюдать за их изменением, рассмотрев таблицу, в которой приведены факториалы чисел от 1 до 10:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880	3 628 800

А значение выражения $15!$, которого нет в таблице, превосходит 10^{12} , а именно: $15! = 1307674368000$. Может быть, именно из-за быстрого роста факториалов восхищённый изобретатель этого выражения использовал восклицательный знак.

ФОРМУЛА ЧИСЛА ПЕРЕСТАНОВОК С помощью символа $n!$ принято записывать формулу для подсчёта числа перестановок. Число перестановок для множества из n элементов обозначают P_n ; читают « P из n », P — первая буква французского слова *permutation* — перестановка.

! Число перестановок для множества из n элементов вычисляют по формуле

$$P_n = n!$$

Пример 1. В расписании уроков 7 класса на среду должно быть шесть предметов: русский язык, алгебра, геометрия, география, физика, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание на этот день?

РАСПИСАНИЕ УРОКОВ НА СРЕДУ	
1	Русский язык
2	Алгебра
3	Геометрия
4	География
5	Физика
6	Физкультура

Число способов, которыми можно составить расписание, равно числу перестановок из шести элементов:

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Пример 2. Сколькими способами можно составить расписание из тех же шести предметов, если требуется, чтобы урок физкультуры был последним?

У урока физкультуры фиксированное место, поэтому расписания различаются порядком остальных пяти предметов. Значит, число таких расписаний равно числу перестановок из пяти элементов: $P_5 = 5! = 120$.

Пример 3. Сколькими способами можно составить такое расписание из тех же шести предметов, в котором алгебра и геометрия стоят рядом?

Будем рассматривать алгебру и геометрию как один предмет, тогда всего предметов будет пять. Число способов, которыми можно составить расписание из пяти предметов, равно $P_5 = 5!$. Но в каждой из этих перестановок алгебра и геометрия могут меняться местами. Поэтому искомое число расписаний вдвое больше. Оно равно $5! \cdot 2 = 240$.

В начале XVIII в. математическая символика только формировалась и Я. Бернулли формулировал правило для вычисления перестановок любого числа элементов так: «Если перемножить все числа от единицы, следующие в естественном порядке до данного числа вещей включительно, произведение укажет то, что было отыскиваемо».



ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ:

● Повторяя рассуждения, приведённые в тексте, покажите, чему равно число перестановок из шести элементов; из семи элементов.

● Используя термин «факториал», ответьте, сколькими способами могут распределиться места между шестью участниками турнира; семью участниками.

РЕШАЕМ ЗАДАЧИ

673

а) В понедельник у семиклассников 5 уроков: алгебра, русский язык, история, литература, физкультура. Сколькими способами можно составить расписание уроков на понедельник?

б) Во вторник у семиклассников также 5 уроков: алгебра, история, русский язык, литература, география. Сколькими способами можно составить расписание уроков на вторник, если уроки русского языка и литературы должны идти подряд?

674

Анаграмма — это слово, полученное из данного слова перестановкой его букв (но необязательно имеющее смысл). Сколько существует различных анаграмм слова «футбол»? слова «теннис»?

675

Сколько существует различных анаграмм слова: а) факториал; б) перестановка; в) комбинаторика?

Указание. б) Временно считайте две буквы «а» различными буквами и обозначьте их « a_1 » и « a_2 »; подсчитайте всевозможные анаграммы. После этого учтите, что те анаграммы, которые получаются перестановкой букв « a_1 » и « a_2 », а также « e_1 » и « e_2 », на самом деле одинаковы.

676

Из нечётных цифр составляют всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр.

а) Сколько всего таких чисел?

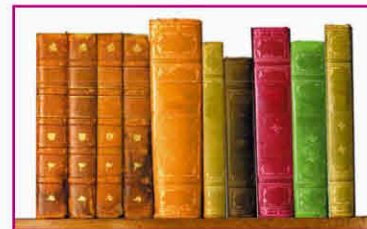
б) Сколько таких чисел начинается с цифры 1?

677

Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляют пятизначные числа, в которых все цифры разные.

а) Сколько из них делится на 5?

б) Сколько из них не делится на 5?

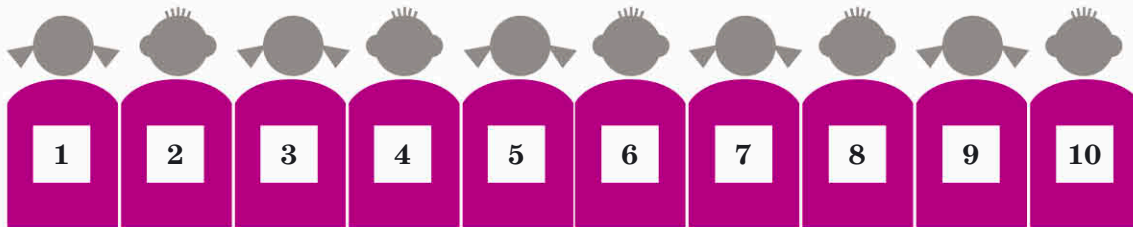


678

Сколькими способами можно расставить на полке десять книг, из которых четыре книги одного автора, а остальные — разных авторов, таким образом, чтобы книги одного автора стояли рядом?

679

Пять мальчиков и пять девочек занимают в театре в одном ряду места с 1-го по 10-е. Мальчики садятся на чётные места, а девочки — на нечётные. Сколькими способами они могут это сделать?



Неверно!

Два ученика решали задачу: «Сколько пятизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 0, 2, 4, 6, 8?» Один дал ответ 5!, а другой $4 \cdot 4!$. Кто из них допустил ошибку и в чём она состоит?

УЗНАЙТЕ БОЛЬШЕ

КРУГОВЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

Иногда условие задачи можно понять по-разному, и тогда при переводе условия на математический язык получаются разные задачи. Давайте исследуем эту проблему на примере комбинаторных задач на перестановки по кругу.

Задача. Сколько существует вариантов расположения шести гостей за шестиместным столом?

Эта задача имеет разные ответы в зависимости от того, что понимать под различным расположением гостей за столом. Если считать, что нам важно, кто на каком стуле сидит, то это простая задача на перестановки и всего будет $6! = 720$ различных вариантов посадить гостей за стол.

Однако часто бывает важно не кто какой стул занял, а то, кто с кем сидит рядом, т. е. взаимное расположение гостей. Это уже совсем другая задача. Теперь расположения, получаемые одно из другого при одновременном перемещении всех гостей вокруг стола без изменения их взаимного расположения (рис. 8.7), надо считать одинаковыми. Ясно, что для любого расположения гостей таких одинаковых вариантов, получаемых один из другого поворотом, шесть. Значит, $6!$ надо разделить на 6. Так как $6! : 6 = 5!$, то получается только 120 различных вариантов.

Но если нас интересует только взаимное расположение гостей, то одинаковыми можно считать и такие симметричные расположения, при которых у каждого гостя остаются те же соседи за столом, только левый и правый соседи меняются местами (рис. 8.8).

При таком понимании общее число различных расположений гостей вокруг стола будет ещё вдвое меньше: $120 : 2 = 60$.



Рис. 8.7

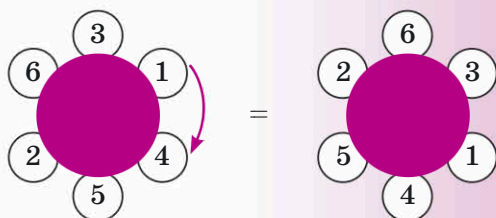
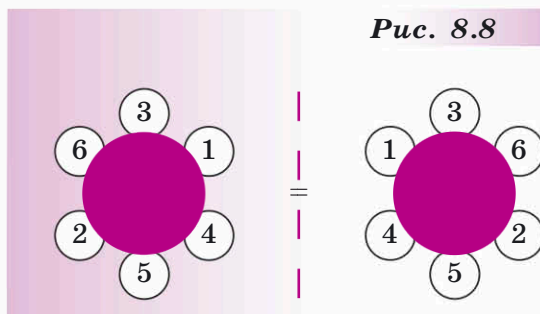


Рис. 8.8



1

а) Сколько имеется вариантов рассадить президентов восьми государств за восьмиместным круглым столом переговоров?

б) Сколькими способами 10 друзей могут сесть на 10-местную карусель?

2

Двенадцать девочек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

3

Сколько различных браслетов можно составить из 20 различных бусин?

ПОДВЕДЁМ ИТОГИ

Комбинаторное правило умножения:

Если первый элемент некоторой пары можно выбрать m способами и для каждого из этих способов второй элемент можно выбрать n способами, то эту пару можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Перестановкой называют расположение элементов множества в определённом порядке.

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называют *факториалом* и обозначают $n!$

Формула числа перестановок:

$$P_n = n!$$

Комбинаторное правило сложения:

Если первое действие можно выполнить n способами, а второе действие — m способами, то выполнить или первое действие, или второе можно $m + n$ способами.

Задача. Сколько существует двузначных чисел, у которых обе цифры нечётные?

Нечётные цифры: 1, 3, 5, 7, 9.

Всего таких чисел — $5 \cdot 5 = 25$.

ABC , ACB , BAC , BCA , CAB , CBA — перестановки из трёх букв: A , B и C .

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 2)(n - 1)n$$

Всего перестановок из трёх букв $P_3 = 3! = 6$.

Задача. В меню кафе 4 блюда из мяса и 3 блюда из рыбы.

Сколькими способами можно сделать заказ одного блюда?

$4 + 3 = 7$ способами.

- 1 Коля хочет купить 5 музыкальных дисков, но денег у него хватит только на 3 диска. Сколько у него есть вариантов для выбора покупки?
- 2 Приведите пример задачи, которая решается с помощью правила умножения.
- 3 Подарочный набор составляют из флакона с духами и губной помады. Сколькими способами можно составить подарочный набор, если имеется 8 видов духов и 12 оттенков губной помады?
- 4 В тесте 6 вопросов. На каждый вопрос следует ответить «да» или «нет». Сколькими способами можно ответить на вопросы теста?
- 5 В латинском алфавите 26 букв. Сколько существует вариантов выбора двух букв, чтобы обозначить отрезок?
- 6 В соревнованиях приняли участие 6 боксёров, причём каждый с каждым провёл по одному бою. Сколько всего боёв было проведено? Перед началом каждого боя боксёры обменивались вымпелами. Сколько всего было вымпелов?
- 7 Приведите пример задачи, в которой нужно подсчитать число перестановок.
- 8 Сколько существует трёхзначных чисел, составленных из нечётных цифр (все цифры в записи числа различны)?
- 9 Сколькими способами можно построить в ряд пять человек? четырёх девочек и мальчика, если мальчик должен быть последним?
- 10 В некотором алфавите пять букв. Сколько всего слов, состоящих не более чем из двух букв, можно составить?

ТАБЛИЦА КВАДРАТОВ НАТУРАЛЬНЫХ
ЧИСЕЛ от 10 до 99

ДЕСЯТКИ	ЕДИНИЦЫ									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

НАЗВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СТЕПЕНЕЙ ДЕСЯТИ

НАЗВАНИЕ	ЗНАЧЕНИЕ
ЕДИНИЦА	10^0
ДЕСЯТЬ	10^1
СТО	10^2
ТЫСЯЧА	10^3
МИЛЛИОН	10^6
МИЛЛИАРД	10^9
ТРИЛЛИОН	10^{12}

ОТВЕТЫ

Глава 1

8. е) $\frac{3}{19} < \frac{5}{21}$; ж) $\frac{4}{7} < \frac{5}{8}$; з) $\frac{13}{30} < \frac{21}{40}$. 9. е) $0,2 < \frac{4}{15}$; ж) $\frac{5}{6} < 0,84$; з) $\frac{4}{7} > 0,57$.
10. а) У Пети; б) Колин. 11. а) $0,5 < 0,55 < \frac{5}{9}$; б) $0,2 < 0,28 < \frac{2}{7}$; в) $0,6 < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$; г) $0,7 < \frac{7}{9} < \frac{4}{5}$. 16. а) $\frac{7}{40} > 0,165 > 0,16$; б) $\frac{8}{17} > \frac{9}{20} > \frac{12}{35}$; в) $\frac{7}{12} > 0,54 > \frac{8}{15}$.
17. а) $\frac{14}{25} < \frac{5}{8} < \frac{9}{14} < \frac{2}{3} < \frac{5}{7}$; б) $-\frac{3}{4} < -\frac{5}{9} < -\frac{11}{20} < -\frac{8}{15} < -\frac{4}{9}$. 18. а) Всего есть шесть таких дробей, $\frac{5}{7}$ — наибольшая, $\frac{2}{7}$ — наименьшая; б) всего есть шесть таких дробей, $\frac{7}{2}$ — наибольшая, $\frac{7}{5}$ — наименьшая. 19. а) $1\frac{1}{6}$; б) 1,12; в) $\frac{1}{30}$; г) 0,04; д) 0,008; е) $\frac{1}{9}$; ж) $\frac{5}{6}$; з) 5,6. 20. а) 0,45; б) $\frac{1}{60}$; в) $5\frac{1}{3}$; г) $2\frac{1}{3}$; д) 0,16; е) 2,5. 21. 2) а) -4,15; б) $-\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{14}$; г) -0,8; д) -0,6; е) -0,34; ж) 1,65; з) $-\frac{8}{15}$.
22. а) 1,25; -78,75; б) 14,2; 37; в) 10,4; 4,73. 23. 2) а) $1\frac{2}{3}$; б) 0,5; в) 0,24; г) $\frac{2}{15}$. 24. а) $\frac{4}{7}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{1}{36}$; г) $\frac{1}{3}$; д) $\frac{2}{11}$; е) $\frac{1}{15}$. 25. 2) а) $\frac{2}{15}$; б) 0,15; в) $-\frac{8}{11}$; г) $1\frac{2}{3}$. 26. У второго, на 0,5 км/ч. 27. 18 км/ч, 18,9 км/ч, 19,3 км/ч. 28. При стороне квадрата, равной 0,2 м. 29. В России 80 кг; в США 169,8 фунта, это примерно 77,1 кг. 32. $(-3)^5 = -243$; $(-3)^6 = 729$. 33. $4^9 = 262\,144$. 35. а) 57; 225; 113; б) 125; -205; 1115; в) 80; 10 000; 10 000; г) 125; 1,25; 125. 36. а) 25; 1; б) 1; -1,6; в) -19; -1; г) 0,008; 0,026. 37. а) -128; б) -30,001; в) -0,135; г) -16. 38. а) 163 см³; б) 1,3 м³. 43. 1) 81 900 000 000 000 км; 2) 0,000 000 14 мм.
44. 2) 1 см = 10⁻² м; 1 мм = 10⁻³ м; 1 мк = 10⁻⁶ м. 45. 1) 0,1 мм · 2⁶ = 6,4 мм; 2) $T = 0,1 \cdot 2^n$ мм. 51. а) 945 автомобилей; б) 9162 р. 52. а) 816 учащихся; б) 57 750 жителей. 53. а) 12 000 р.; б) 6000 р. 54. а) 200 детей; б) 200 мест. 55. а) 0,1 %; б) 17 %. 56. 4 %. 57. 500 м. 58. 1) 90 студентов; 2) 160 мест. 59. 1) 10 г; 2) 4 кг. 60. а) 22 %; б) 10,4 %. 64. 570 р.; 1440 р. 65. а) 1980 р. 66. 31 000 р. 67. 5700 р.; 5415 р. 68. В магазине С. 69. Неверные 1 и 2; 1) рост цен составил 125 %; 2) тарифы повышены на 100 %. 72. Можно. 74. а) 4 %; б) 60 кг. 75. а) 11 %; б) 14 %. 76. а) Среднее арифметическое $\approx 13\frac{2}{11}$, мода 13; б) среднее арифметическое $\approx 35\frac{2}{9}$. 79. Верное утверждение — в). 80. 1,2; 1. 82. Размах посещаемости 23200 человек, средняя посещаемость 16 000 человек. 84. а) Нет; б) нет. 87. Достоверные: D, E; невозможное: B. 88. Являются:

B, C ; не являются: A, D, E . **92.** Невозможное при $n = 1, 2$; достоверное при $n = 7, 8, 9$. **94.** Событие A : всего 4 исхода, шанс $-\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; событие B : всего 18 исходов (любая карта червонной или бубновой масти), шанс $-\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$; событие C : всего 9 исходов (любая карта бубновой масти), шанс $-\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. **96.** Шансы событий: $A - \frac{1}{6}, B - \frac{5}{6}, C - \frac{3}{6}, D - \frac{2}{6}$. События в порядке возрастания их шансов: A, D, C, B . **98.** Все три вертушки дают равные шансы. **100.** а) $\frac{67}{92} \approx 0,73$; $\frac{25}{92} \approx 0,27$; б) $\frac{2348}{4375} \approx 0,54$; $\frac{2027}{4375} \approx 0,46$. **102.** 1429; 1329. **103.** 180. **104.** 600.

Узнайте больше

1. 3^{10} — цифрой 9, 3^{15} — цифрой 7, 3^{120} — цифрой 1, 3^{126} — цифрой 9. **3.** 2^{102} . **6.** Числа m и n или оба чётные, или оба нечётные. **7.** Все три числа делятся на 10.

Глава 2

122. $I = 0,045m$. **128.** а) 200 м; 300 м; б) 3 мин; 24 мин. **130.** Сухая дафния: 15 чайных ложек на 25 рыбок, 30 чайных ложек на 50 рыбок; мотылёк: 900 штук на 25 рыбок, 1800 штук на 50 рыбок. **131.** 720 г. **132.** а) 45 страниц. **135.** а) $n = \frac{900}{l}$; обратная пропорциональность; б) $V = 0,08s$; прямая пропорциональность. **137.** а) Краски 3600 р.; мелки 1000 р.; б) 6 кг груш; 18 кг апельсинов; в) на 240 дней; на 24 дня; на 20 дней. **139.** а) На 20 курток в день; б) на 140 г. **141.** За 24 мин. **142.** Расходы увеличились в 1,8 раза, или на 80%. **151.** а) 3,6 мм; б) 16 мин 40 с. **154.** а) Надо добавить 6 рабочих; б) надо добавить 1 насос. **157.** а) 1170 г; б) 600 г. **158.** а) 45 м^2 ; б) 11,8 м. **160.** а) $\frac{2}{11}$; $\frac{9}{11}$; б) 44 %. **164.** 36 мин, 36 мин, 54 мин, 18 мин. **165.** Подсказка. Сравните каждую сторону треугольника (выраженную в частях) с суммой двух других сторон. а) Существует; 4,8 см, 6 см, 7,2 см; б) не существует. **166.** 12 000 р. — 5 класс, 18 000 р. — 6 класс, 24 000 р. — 7 класс. **168.** а) $3x$ вопросов; б) $2y$ вопросов. **169.** а) $\frac{1}{5}$ — шалфей, $\frac{1}{2}$ — ромашка, $\frac{3}{10}$ — валериана; б) медь — 88 %, алюминий — 8 %, железо — 4 %. **170.** Первый — 40 %, второй — 26 %, третий — 34 %. **171.** Фирма A : 168 тыс. акций; фирма B : 504 тыс. акций; фирма C : 378 тыс. акций. **172.** $AB = 3 \text{ см}$, $BC = 5 \text{ см}$, $AC = 7,5 \text{ см}$. **173.** Первое место — 6000 р., второе место — 4000 р., третье место — 2400 р.

Узнайте больше

1. На 3 дня. **2.** а) 300 бутылок; б) на 50 дней; в) 20 человек. **3.** На 6 человек.

Глава 3

174. а) 4; б) $\frac{1}{6}$; в) -1; г) 0,7; д) -5. 175. а) 2 и 2; б) 0 и $-\frac{1}{3}$; в) 0,32 и 0,32; г) 0,5 и 0,36. 177. $-(x + y) = -\frac{1}{6}$, $-(x - y) = \frac{5}{6}$, $-(-x + y) = -\frac{5}{6}$, $-(-x - y) = \frac{1}{6}$. 179. Как положительными, так и отрицательными могут быть значения выражений: $a + 2$, $a^2 - 4$. 182. а) $a - (15x + 8y)$ р.; б) $100 - (5m + 10n)$ р. 183. а) $2a + c$ р.; $\frac{2a + c}{3}$ р.; б) $x + 3y$ км; $\frac{x + 3y}{4}$ км/ч. 184. а) $\frac{20}{a + b}$ ч; б) $\frac{5}{x - y}$ ч. 201. $a + \frac{b}{c} = \frac{ac + b}{c}$. 202. а) $\frac{a + b + c}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x}$. 212. а) $m - 12$; б) $x - 12$; в) a ; г) $9 - b$; д) $c - 20$; е) $-y$. 213. а) $2b$; б) $x - z$; в) 5; г) -30; д) $a - 3$; е) a . 214. а), в), г) Чётным; б) нечётным. 215. а) Чётным, б) нечётным. 216. а) $5a + 20$; б) $10a + 90$. 220. а) $-x^2y^2$; б) $\frac{1}{6}a^2b^2$; в) $-2,4y^2z^2$; г) $-1,6xy^2z$; д) $2,4ab^2c^2$; е) x^2y^2z ; ж) xy^2z^2 ; з) $2ab^2c^2$; и) $6km^2n^2$. 223. а) $-a^2$; б) a^2 ; в) $-a^3$; г) a^3 ; д) $-a^3$; е) a^4 ; ж) $-a^4$; з) $-a^5$; и) a^5 . 226. а) 0,15N; б) 0,08A. 229. а) x^3 ; б) $-x^3$; в) $-x^4$; г) $-x^4$; д) $-x^4$; е) x^4 . 232. а) В 3 раза; б) в 4 раза. 233. а) В 3,6 раза; б) на 68%. 236. а) $2y$; б) $-2b$; в) $2m - n + p$; г) $a + c$; д) x ; е) b . 241. а) $b - a - 2$; б) $2m$. 243. а) $a - b + c + 4$; б) $2x + 3$; в) $a - 10$; г) $c + d$. 250. а) ac ; б) $2b - 1\frac{1}{2}$; в) $mn + 1$; г) 3; д) $2x$; е) -6. 255. а) $2a + 7b$; б) $1 - m$; в) $m^2 - 10$; г) $7y^2$. 256. а) $4a - ab$; б) $5x - xy$; в) $y - x$; г) $mn - m - 3n$; д) $3abc$; е) $-2xyz$. 257. а) 2,8; б) -1,6. 259. На $\frac{1}{4}$ v км/ч. 260. Увеличилась, на 20%. 262. а) $7a + 3b + 12$; б) $3x - 7z$; в) $24a$; г) $3n - 12$; д) 3; е) $2x + 4$. 264. а) $2ab$; б) $8y - 8x$; в) $ab - bc - 6a - 6b$; г) 0. 265. $4m - 21$. 266. $4a + 2$ км. 267. б) $2(k - a) - (k - a)$; г) $ab + (1 - a)b + 1$. 268. а) $3y + 1$; б) $3a - 3x$; в) $3 - 2m$; г) $2c - b$. 269. $5a - 40t$ ч.

Глава 4

275. Пусть из первой машины выгрузили x ящиков. Получим уравнение $3000 - 15x = 5000 - 20 \cdot 2x$. 276. 1) Пусть задумано число x . Имеем $\frac{x + 11}{2} = x + 2$. 277. Пусть Петру x лет, тогда получим уравнение $x + 3x + 6x = 110$. Пусть отцу x лет, тогда получим уравнение $\frac{x}{3} + x + 2x = 110$. Пусть деду x лет, тогда получим уравнение $\frac{x}{6} + \frac{x}{2} + x = 110$. 288. а) 0,4; б) $\frac{2}{7}$; в) -2,1; г) -9; д) 40; е) $-2\frac{1}{2}$; ж) -1; з) $\frac{1}{9}$. 291. а) 7; б) 16; в) 4; г) 20; д) 7; е) -70; ж) -2; з) 0,5. 293. а) 6; б) 5; в) -4; г) 3; д) 10; е) 0,5; ж) 6; з) -70. 295. а) 7; б) 31; в) 2; г) 0; д) 4; е) -30. 296. а) 33; б) -2; в) 15; г) 3; д) 2; е) 3. 297. а) 24; б) -5; в) 2; г) 8; д) -14; е) 30; ж) 42; з) 10. 298. а) 1,1; б) 2,8. 299. а) 11; б) -3; в) 0; г) $1\frac{1}{8}$. 300. а) 11; б) -7; в) 10; г) -0,4. 301. 13,5. 307. 144, 48 и 12 гульденов. 308. 24 л, 21 л и 16 л. 309. 4,5 кг, 3 кг, 3,5 кг и 3,5 кг.

314. 2400 р. 315. 30 марок. 316. 2,4 км. 317. 1 км. 318. 150 км. 319. 30 км.
320. 15 кг. 321. 800 г белой и 700 г синей. 322. 160 орехов. 323. 28 учеников.
324. 10 вёрст.

Узнайте больше

2. а) -7 и 5; б) -3 и 2. 3. -3 и 4. 4. 2. 6. 8 шахматистов.

Глава 5

329. а) 0; $\frac{1}{3}$; 3; б) 0; $\frac{1}{3}$; 3; в) 3; г) ни одно из данных чисел. 330. а) Интервалу — 7 чисел, отрезку — 8 чисел; наименьшим целым числом и для интервала, и для отрезка является -2, наибольшим для интервала является число 4, для отрезка — число 5. б) бесконечно много. 333. а) 4,9; 9,8; 15,9; б) 4; 4,9; 0,9; 6,1. 335. 64. 336. $B(-5)$ или $B(3)$. 337. 2) а) 2,8. 341. а) $y = -2$; б) $x = -1$; в) $y = 0$; г) $x = 0$. 379. (0; 0), (1; 1), (-1; -1). 381. (0; 0), (1; 1), (-1; 1). 386. г) Через 20 мин и примерно через 3 ч 8 мин; д) 3 км/ч — на подъёме и 6 км/ч — на спуске. 389. а) 150 р.; б) 200 р. и 250 р.; в) I; II.

Глава 6

393. а) $-x^3$; б) x^3 ; в) x^3 ; г) $-x^4$; д) $-x^5$; е) x^4 . 396. а) 9; б) 16; в) $\frac{1}{125}$; г) $\frac{1}{36}$; д) 1 000 000; е) $\frac{1}{32}$. 398. 1) а) 59 049; б) 531 441; в) 243; г) 177 147. 402. а) $4y^3$; б) $10c^2$; в) $\frac{10}{x^5}$; г) $\frac{10}{a}$. 403. в) 1600; г) 2000; д) 0,0018; е) 0,003. 405. а) 27; б) 32; в) 100; г) 25; д) 2. 406. а) x^{n+5} ; б) y^{n+1} ; в) c^{2n} ; г) a^{2n+1} ; д) x^{n-2} ; е) x ; ж) x^{n-1} ; з) x^n . 410. а) a^7 ; б) y^{16} ; в) c^{17} ; г) x^{25} ; д) k^{36} ; е) $\frac{1}{a^5}$; ж) x^{25} ; з) y^2 . 414. а) 1; б) $\frac{1}{8}$; в) 3; г) 1. 415. а) x^{n+12} ; x^{4n} ; б) x^{n^2} ; x^{2n} . 423. а) 10 000; б) 1 000 000; в) 1; г) 8; д) 243; е) 1. 424. а) 125; б) 16; в) $\frac{1}{64}$; г) $3\frac{3}{8}$; д) $\frac{1}{36}$. 425. а) 64; б) 1; в) 9; г) 1. 426. а) 0,04; б) 1,5; в) 75; г) 125. 427. а) 16; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{2}{3}$. 429. а) Можно, 6^5 ; б) нельзя; в) можно, 15^4 ; г) можно, 84^3 . 431. а) -3; б) 0,01. 434. в) $-6a^5$; г) $5x^7$; д) $-2a^3b^4$; е) $-5a^2b^4$; ж) $-10a^4$; з) $20a^7x^3$. 436. а) a^7b^8 ; б) $x^{12}y^9$; в) $4m^6n^8$; г) $4y^5z^6$. 437. а) 3; б) -2,2. 439. а) -0,072; б) -5,5. 443. а) 9; б) -1; в) 1; г) 651; д) 701. 446. 1) 3240; 2) 22140; 3) 44100; 4) 9245. 452. а) $5a - 4b + bc$; б) $-n - 13mn$; в) $7c^2 - 4cd - 6d^2$; г) $a^3 - 4ab$. 453. а) 1,8; б) 1; в) -8, значение выражения не зависит от значений m и n ; г) 0, значение выражения не зависит от значений входящих в него переменных. 454. а) $X = b^2 + 5ab - 3a^2$; б) $X = -c^3 + c^2 + c + 1$. 465. $P - Q + R = m^2 + 2m - 2$; $P - Q - R = m^2$.

466. а) $a - b + c - d$; б) $2y$. 474. а) -16 ; б) $\frac{1}{2}$. 476. а) $6y + 20$ км; б) $4,5a - 1,5b$ км. 477. а) 7; б) 3,2; в) $-0,75$; г) 2,4; д) 2,14; е) $-4,4$. 478. а) 6; б) 2; в) 0,5; г) 0. 479. а) $-3a - 7b$; б) $-8y + 4z$; в) $2ab$; г) $-x^2 - 2y$. 480. а) $x^2 + 7x$; б) $m^3 - 2m^2n - n^3$; в) $p^2 - 4p$; г) $3a^2 + 6ac$. 488. а) $y^3 + y^2 - 3y + 1$; б) $z^3 - 2z^2 - 13z - 10$; в) $a^3 + b^3$; г) $x^3 - y^3$; д) $8x^3 - 4xy^2 + y^3$; е) $2a^3 - 9ac^2 + 27c^3$. 490. а) -20 ; б) 99; в) 5,75. 491. а) 1; б) 0,6; в) -2 ; г) 2,5. 492. а) $5n^2 - 3n - 4$; б) $-4x^2 - 6xy + 4y^2$; в) $12a + 10$; г) $16c^2 - 16cd + 3d^2$. 493. а) $x^4 + 2x^3 - 15x^2$; б) $-2c^4 + 8c^3 - 6c^2$; в) $3y^5 + 3y^4 - 6y^3$; г) $a^5 - 1,5a^4 - 4a^3 + 6a^2$. 505. г) $0,25y^2 - 2y^4 + 4y^6$; д) $9x^6 - 6x^5 + x^4$; е) $100a^4 + 2a^5 + 0,01a^6$. 506. б) $x^{2m} + 2x^{m+1} + x^2$; в) $y^{2n} - 2y^{n+2} + y^4$. 509. в) $k = 8$ или $k = -8$; г) $k = 10$ или $k = -10$; д) $k = 9$; е) $k = 16a^2$. 514. а) 83; б) 29,5. 515. а) 4; б) 3,5; в) -9 ; г) 8; д) 3,5; е) 3. 518. а) $-y^2 + 2$; б) $5x^2 - 26x + 41$; в) $-5b + 14$; г) $-2a^2 + 4a + 14$; д) $-2y^2 + 19y - 40$; е) $10x^2 - 23x + 11$. 519. а) $2a^2 - 6a$; б) $12c^2 + 38c$. 520. а) $(2a - b)^2$; б) $(2x + 2y)^2$; в) $(2m - 5n)^2$. 525. 2) 208; 3) 314. 527. 4 км/ч. 528. 180 км от А и 120 км от В. 529. 70 км/ч и 90 км/ч. 530. $\frac{3}{4}$ ч, 3 км. 531. 2 км/ч, 112 км. 532. 18 км/ч, 80 км. 533. 3 ч, 60 км. 534. 5 км/ч, 15 км/ч. 535. Через 1,9 ч и через 2,3 ч. 536. 4×4 см, 2×8 см. 537. 24×24 см, 32×18 см. 538. 15 см; 225 см^2 . 539. 8100 м^2 . 540. 18×18 см, 324 см^2 . 541. 19×35 см.

Глава 7

549. а) $2ab(ab - 3b + a)$; б) $3am(a^2 + 3a - 2m)$; в) $2xyz(6yz - 4x^2z - xy)$; г) $-4a^3b^2c(a + 2ab + 4)$. 551. а) $(x - y)(a + b)$; б) $(b - c)(a + b)$; в) $(x - 4)(x + 5)$; г) $(b - 1)^2$. 552. а) 9700; 40 600; б) 169; -225 . 554. а) 3300; б) -14 . 556. а) $\frac{1}{2}$; б) -10 ; в) 0,3; г) 2,7. 557. а) -4 ; б) $-\frac{1}{9}$. 565. а) $(b + c)(a - 1)$; б) $(n - 1)(m + 1)$; в) $(b - d)(a + 3)$; г) $(y - z)(x - 1)$; д) $(m - 1)(a - 2)$; е) $(x - y)(3 - 2a)$. 567. а) $(x + y)(x - 1)$; б) $(a - b)(a^2 + 1)$; в) $(4a - c)(c + a)$; г) $(2b - 1)(5b + c)$; д) $(x^2 + y)(y^2 - x)$; е) $(y - 1)(y^2 - 3)$. 568. а) $(a + b)(x - y + z)$; б) $(2a - 1)(a + b - c)$; в) $(a - b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)$; г) $(ax + b)(x + by + ab)$. 569. а) $(b + 2)(b + 3)$; б) $(c - 3)(c - 4)$; в) $(a + b)(a + 4b)$; г) $(c - b)(c - 3b)$. 570. а) 2,7; б) 1,7. 571. а) 162; б) 0. 581. а) $(x + y)(1 + x - y)$; б) $(a - b)(1 + a + b)$; в) $(a + 8)(a - 7)$; г) $(2 - c)(-1 - c)$; д) $2(1 - a)$; е) $2x(x - 2)$. 583. а) $\frac{2}{3}$; б) 15; в) 4; г) $\frac{1}{6}$. 584. а) $\frac{1}{a + b}$; б) $\frac{x - 1}{a}$; в) $\frac{a}{b + 2}$; г) $\frac{a - b}{a + b}$; д) $\frac{x - y}{x + y}$. 585–586. Подсказка. Представьте разность в виде произведения числовых множителей. 591. а) $4 + a^2$; б) $1 - 8m^2$. 592. а) $2x^2 - 2x - 1$; б) $a^2 - b^2 + 4a$; в) $14y^2 + 5y - x^2$; г) 5;

д) $2mn - 2n^2$; е) $4a + 2$. 593. а) $m^3 - m$; б) $18 - 2x^2$; в) $2a^2c - 2c^3$; г) $3xy^2 - 3x$. 594. а) $a - 9$; б) $2a^2 - 8$. 595. а) $a^4 - b^4$; б) $1 - x^8$. 596. а) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; б) $x^2 - y^2 + 2yz - z^2$; в) $a^4 - 2a^2 + 1$; г) $m^4 - 8m^2 + 16$. 601. а) $2a^3$; б) 16; в) $27 - x$; г) $17y$. 605. а) $(xy - 1)(x^2y^2 + xy + 1)$; б) $(2ab + c)(4a^2b^2 - 2abc + c^2)$; в) $(1 - abc)(1 + abc + a^2b^2c^2)$; г) $(ab - 5xy)(a^2b^2 + 5abxy + 25x^2y^2)$. 606. а) $2b(3a^2 + b^2)$; б) $2x(x^2 + 3y^2)$; в) $18(m^2 + 3)$; г) $2n(n^2 + 3)$. 607. а) $\frac{1}{a^2 - ab + b^2}$; б) $\frac{x^2 + xy + y^2}{3}$; в) $\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$; г) $\frac{a - b}{a^2 + ab + b^2}$; д) $\frac{x + y}{5}$. 609. а) $a^6 - b^6$; б) $a^6 + 2a^3b^3 + b^6$; в) $x^{12} - 1$; г) $x^6 - y^6$. 610. а) $a^3 + 3a + 4$; б) $x^3 + 6x - 7$; в) $a^3 - b^3 + 2a^2b - 2ab^2$; г) $x^3 + y^3 - 2x^2y - 2xy^2$. 613. в) $y(x + y)^2$; г) $ay(a - 2)^2$; д) $3(c - 3a)^2$; е) $-3c(b - c)^2$. 615. в) $a(m - n)(m^2 + mn + n^2)$; г) $5(1 + x)(1 - x + x^2)$; д) $y(3 - y)(9 + 3y + y^2)$. 616. а) $(b - c)(b + c - 1)$; б) $(a + b)(1 - a + b)$; в) $(a - 1)(a + 1)^2$; г) $(m - n)(1 - m - n)$; д) $(b - d)(b + d) \times (a - c)$; е) $(x - 1)(x + 1)(y - 1)(y + 1)$. 617. а) $(a + b)(a - b)^2$; б) $-(x + y) \times (x - y)^2$; в) $(n + a)(n - 1)(n^2 + n + 1)$; г) $(a - b)^3$. 618. а) $(x + y)(a - x - y)$; б) $(a - b)(a - b - 1)$; г) $(3a^2 + c - 3)(3a^2 + c + 3)$; е) $x(2x^2 + y - 2)(2x^2 + y + 2)$. 621. а) $(a - 1)(a + 5)$; б) $(x - 6)(x + 4)$; в) $(a + 3)(a + 5)$; г) $(x - 7)(x - 3)$. 623. 2) а) $(x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)(x^8 + y^8)(x^{16} + y^{16})$, 5 множителей; б) $(x + y) \times (x^2 + y^2) \cdot \dots \cdot (x^{32} + y^{32})$, 6 множителей. 625. а) -3; 3; б) -2,5; 2,5; в) -1; 1; г) $-1\frac{2}{3}$; $1\frac{2}{3}$. 626. а) 0; -5; б) 0; 9; в) 0; -2; г) 0; 0,5; д) 0; -1,5; е) 0; -0,4. 630. а) 6; б) 0,5; в) 1; -3; г) -4; -2. 631. а) 1; -0,25; б) 1; 3; в) 2; -0,5; г) 3; 1. 633. а) -1; -3; б) 2; -4; в) 3; -1; г) 8; 2; д) 6; -2; е) 5; 3. 634. а) a ; $-a$; б) m ; $-m$; в) $a - 4$; $-a - 4$; г) $m + 4$; $m - 4$.

Узнайте больше

1. а) $(a - 1)(a^2 - 4a + 5)$; б) прибавьте и вычтите $4y^4$. 2. а) $(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$; б) $(n^4 - n^2 + 1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$. 3. 1; -1.

Глава 8

638. $5 \cdot 4 = 20$. 639. 1) $4 \cdot 4 = 16$. 640. 10. 641. а) $40 \cdot 25 = 1000$; б) нет, так как $4 \cdot 6 < 25$. 642. а) $3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$. 643. а) $8 \cdot 7 = 56$; б) $101 \cdot 100 = 10\,100$. 644. а) $16 \cdot 15 \cdot 14 = 3360$; б) $16 \cdot 15 = 240$. 645. а) $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$; б) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. 646. $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$; $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$. 647. $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 45\,000$; $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 18\,000$; 9000. 649. а) $\frac{20 \cdot 19}{2} = 190$; б) $\frac{100 \cdot 99}{2} = 4950$. 650. а) $5 \cdot 4 = 20$; б) $\frac{25 \cdot 24}{2} = 300$. 651. $2^5 = 32$. 652. $2^8 = 256$. 653. в) 8. 655. 120. 656. 8. 657. 39. 658. 10. 659. 10. 660. 60. 662. 27. 667. а) 8!; б) 10!. 668. а) 24; б) 120; в) 144; г) 2880;

д) 480. 669. а–в) Нет; г) да. 670. а) Делится на 47, на 99, на 102; б) 24 нулями.
675. а) $\frac{9!}{2}$; б) $\frac{12!}{2^2}$; в) $\frac{13!}{2^4}$. 677. а) $4! = 24$; б) $5! - 4! = 96$.

Узнайте больше

1. а) В зависимости от того, какие рассадки считать разными, будут получены ответы: $8!$; $7!$; $\frac{7!}{2}$; б) если все фигуры на карусели разные, то $10!$, если все карусели одинаковые, то $9!$. 2. $11!$. 3. $\frac{19!}{2}$.

Учебное издание

Серия «Сферы»

Бунимович Евгений Абрамович
Кузнецова Людмила Викторовна
Минаева Светлана Станиславовна
Рослова Лариса Олеговна
Суворова Светлана Борисовна

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник

Центр математики

Ответственный за выпуск *Э. А. Мазурова*

Редактор *Н. Н. Гриценко*

Картограф *М. А. Григорьева*

Художественный редактор *А. П. Асеев*

Художники *А. В. Юдин, С. Г. Куркина, А. П. Асеев*

Компьютерная вёрстка *А. П. Асеева*

Дизайн обложки *О. В. Поповича, В. А. Прокудина*

Технический редактор *С. Н. Терехова*

Корректоры *Л. А. Ермолина, И. Н. Панкова*

Подписано в печать 15.02.2022. Формат 84×108/16.

Гарнитура SchoolBookCSanPin, FreeSetC. Усл. печ. л. 21,84.

Уч.-изд. л. 19,66. Тираж экз. Заказ № .

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация,
127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Адрес электронной почты «Горячей линии» — vopros@prosv.ru.